Technische Universität München

PROF. DR. GERO FRIESECKE
ARSENIY TSIPENYUK

SS 2017
BLATT 11

Funktionentheorie [MA2006/MA2008]

Tutoraufgaben

(Besprechung im Zeitraum vom 18.07.–20.07.2017)

T 1. Sei Ω eine offene Umgebung der oberen komplexen Halbebene

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Sei $f\colon \Omega \to C$ holomorph mit $|z^c f(z)| \leqslant M, M, c > 0$, für alle $z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{H}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für } z \in \mathbb{H}.$$

T 2. (Identitätssatz) Seien f, g holomorph.

(a) Formulieren Sie den Identitätssatz mit eigenen Worten in einem Satz.

(b) Sei $f = \log$, $g(z) = \log(-z) + i\pi$. Zeigen Sie: $f \neq g$. Auf welcher Menge stimmen die beiden Funktionen überein?

(c) Seien $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $\frac{d^n f(0)}{dz} = \frac{d^n g(0)}{dz}$ für $n = 0, 1, \ldots 2017$. Man gebe ein Beispiel für $f \neq g$.

(d) Ist $g(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ein Gegenbeispiel zum Identitätssatz, da doch $g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$?

Hausaufgaben

(Abgabe bis 25.07.2017, 18:00 Uhr, Briefkasten im MI-Untergeschoss)

H 1. (Anwendungen des Identitätssatzes) Gibt es im Ursprung holomorphe Funktionen f, für die jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{1}{n}$, (b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2 - 2}$, (c) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$?

H 2. (Anwendungen des Identitätssatzes) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{k^n} = e^{-\frac{1}{k^2}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wie lautet a_{2017}?

H 3. (Varianten der Cauchy'schen Integralformel, nützlich in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{B} = \overline{B_R(0)} \subset U$.

(a) Zeigen Sie:

$$\overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\overline{f(z)}}{z - a} dz \text{für alle } a \in B.$$

(b) Verwenden Sie (a), um zu zeigen:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{\operatorname{Re} f(z)}{z} \frac{z+a}{z-a} dz + i \operatorname{Im} f(0) \quad \text{für alle } a \in B.$$

(c) Können Sie zwei holomorphe Funktionen auf U angeben, deren Realteile auf ∂B gleich, aber in B voneinander verschieden sind?

Hinweis. Hinweis: s. unten.

Hinweis (H 3). *Zu (a): Schreiben Sie das Integral so um, dass komplexe Konjugation nicht über $f(z)$, sondern über dem gesamten Integral steht. Zeigen Sie: für $\overline{z} \in B_R(0)$ gilt: $\overline{z} = R^2/z$. Benutzen Sie diese Gleichheit, um den Integranden in eine passende Form zu bringen. Wenden Sie anschließend Residuensatz an. Zu (b): benutzen Sie die Gleichheit* $\operatorname{Re}(f) = f + \overline{f}$, *schreiben Sie den Integrand in eine Summe um, so dass man über einzelne Summanden leicht integrieren kann.*

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:
http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FunkTheo17