Technische Universität München

Prof. Dr. Gero Friesecke
Arseniy Tsipenyuk

SS 2017
Blatt 10

Funktionentheorie [MA2006/MA2008]

Tutoraufgaben

(Besprechung im Zeitraum vom 11.07.–13.07.2017)

T 1. Sei $U \subset C$ offen, seien $f, g\colon U \to C$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ eine n-fache Nullstelle von f (d. h. c_n ist der erste Koeffizient in der Potenzreihenentwicklung von f um z_0, der ungleich Null ist); sei z_0 eine k-fache Nullstelle von g. Zeigen Sie:

(a) falls $n > k$, hat f/g eine $n-k$-fache Nullstelle in z_0;

(b) falls $n = k$, hat f/g eine hebbare Singularität in z_0;

(c) falls $n < k$, hat f/g einen Pol $k-n$-ter Ordnung in z_0.

T 2.

(a) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $\varphi\colon U \to V$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie: ist U einfach zusammenhängend, dann gilt dies auch für V;

(b) Zeigen Sie: $M = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\} \setminus \mathbb{R}^-$ ist einfach zusammenhängend.

T 3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zeigen Sie: $[a, b]$ ist zusammenhängend in $\mathbb{R}$.

Hinweis. S. Rückseite.

Hausaufgaben

(Abgabe bis 18.07.2017, 18:00 Uhr, Briefkasten im MI-Untergeschoss)

H 1 (Residuen)**.** Berechnen Sie die Residuen folgender Funktionen (jeweils definiert auf ihrem maximalen Definitionsgebiet $\subset \mathbb{C}$) in ihren isolierten Singularitäten und finden Sie heraus, um welche Art von isolierter Singularität es sich jeweils handelt (bei Polen auch deren Ordnung):

(a) $f_1(z) = \frac{1-\cos(2z)}{z^2}$;

(b) $f_2(z) = \exp\left(\frac{-1}{(z^2)(z-1+i)}\right)$;

(c) $f_3(z) = \frac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$.

H 2 (Kurvenintegral mit Residuensatz)**.** Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{\partial B_2(i)} \left(e^{\frac{1}{z}} + \frac{\sin(z^2)}{z+2} + \frac{5}{z-i}\right) dz.$$

H 3. Zeigen Sie:

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{\pi}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Hinweis (T 3). *Nehmen Sie an, es gäbe relativ offene disjunkte Teilmengen A und B, so dass $A \cup B = U$, $A \cap B = \varnothing$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Zeigen Sie: $m = \sup[a,b] \cap A \in A$. Folgern Sie daraus einen Widerspruch, indem Sie die relative Offenheit von A ausnutzen.*

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:
http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FunkTheo17