Prof. Dr. Gero Friesecke
Arseniy Tsipenyuk

SS 2017
Blatt 1

Funktionetheorie [MA2006/MA2008]

Tutoraufgaben

(Besprechung im Zeitraum vom 02.05.–04.05.2017)

T 1 (Komplexe Zahlen)**.** (a) Schreiben Sie die Zahlen $(1+2i)(3+4i)$ und $(1+2i)/(3+4i)$ in der Form $a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie zu den nachfolgenden komplexen Zahlen $z\in\mathbb{C}$ jeweils ein $r\geqslant 0$ und ein $\varphi\in(-\pi;\pi]$, so dass gilt $z=re^{i\varphi}$.

(i) $1+i$; (ii) $1+\sqrt{3}i$; (iii) $1-\sqrt{3}i$; (iv) $4i$; (v) $-1-i$.

Skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Ebene.

T 2 (Konvergenzbereiche)**.** Bestimmen Sie das Innere der Menge aller $z\in\mathbb{C}$, für die die folgenden Reihen absolut konvergieren:

(a) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; (b) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$.

T 3. Holomorph oder nicht?

(a)
$$\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto\frac{1}{z^3};$$

(b)
$$\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto\frac{1}{\overline{z}z^2};$$

(c)
$$\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid x\neq 0\}\to\mathbb{C},\quad z=x+iy\mapsto f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y);$$

mit $u(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$.

Hinweis. Verwenden Sie die Taylorentwicklung der Funktionen u und v, d. h.

$$u((x,y)+(x',y'))=u(x,y)+\nabla u(x,y)\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+O(x'^2+y'^2).$$

Bitte wenden!

Hausaufgaben

(Abgabe bis 09.05.2017, 18:00 Uhr, Briefkasten im MI-Untergeschoss)

H 1. Holomorph oder nicht?

(a) $\dfrac{\overline{z}}{z^2}$, $(z \neq 0)$; (b) e^{-z^2}; (c) $\dfrac{\overline{z}z^3}{|z|^2}$, $(z \neq 0)$;

H 2 (Die Formel von de Moivre[1])**.** Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ zeige man die Formel von de Moivre:

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos(nz) + i \sin(nz).$$

H 3. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: das punktweise Produkt $fg\colon U \to \mathbb{C}$ ist holomorph und es gilt $(fg)' = fg' + f'g$.

H 4. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$, gegeben. Skizzieren Sie die Mengen

(a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy, x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$;

(b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$.

Skizzieren Sie anschließend die Bilder $f(M_1)$, $f(M_2)$ der Mengen M_1 und M_2.

H 5 (Konvergenzbereiche)**.** Bestimmen Sie das Innere der Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die die folgende Reihe absolut konvergiert:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2017} z^n. \tag{1}$$

Hinweis. Spalten Sie die Summe in (1) *in zwei Teile auf und schätzen Sie diese Teile ab. Sie können ohne Beweis die folgende Aussage verwenden: für alle $a, b > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geqslant N$ gilt*

$$n^{2019} < ae^{bn}.$$

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:
http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FunkTheo17

[1] Französischer Mathematiker, 1667-1754.