Def. (Einfach zusammenhängend) Eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede stetige geschlossene Kurve zu einem Punkt homotop ist, d. h. wenn für jedes stetige

$$\gamma\colon [0,T] \to U$$

mit $\gamma(0) = \gamma(T)$ gilt: es gibt $p \in U$ und

$$h\colon [0;1] \times [0,T] \to U,$$

h stetig, so dass

$$\begin{aligned} h(0,t) &= \gamma(t), \\ h(1,t) &= p \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,T]$. Ein solches h heißt Homotopie.

Lemma 6.2 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig. Dann ist U einfach zusammenhängend.

Def. (Homöomorphismus) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\varphi\colon U \to V$ heißt Homöomorphismus, wenn

(i) φ stetig,

(ii) φ bijektiv,

(iii) φ^{-1} stetig.

Falls eine solche Abbildung existiert, heißt U homöomorph zu V. Notation: $U \cong V$.

Beispiel. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon B_1(0) &\to \mathbb{R}^n; \\ z &\mapsto \frac{z}{1-|z|^2}. \end{aligned}$$

ist ein Homöomorphismus zwischen $B_1(0)$ und $\mathbb{R}^n$.

Satz 6.1 Die folgenden Eigenschaften einer Menge U sind Homöomorphie-invariant (d. h., wenn U die Eigenschaft hat, so hat jede zu U homöomorphe Menge V dieselbe Eigenschaft):

(a) offen;

(b) abgeschlossen;

(c) zusammenhängend;

(d) wegzusammenhängend;

(e) einfach zusammenhängend;

(f) [ohne Beweis] offen mit Dimension n (Dimensionsinvarianz).

Bemerkung. Eigenschaften wie Sternförmigkeit sind nicht homöomorphie-invariant.

Satz 6.2 Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und einfach zusammenhängend. Dann gilt: $U \cong B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Insbesondere gilt:

$$U \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ offen, sternförmig} \quad \Rightarrow \quad \{\text{einf. zshgd. Mengen}\} = \{V \subset R^2 \mid V \cong U\}.$$

Folgerung. Im Cauchy'schen Integralsatz und im Residuensatz kann die Voraussetzung U (bzw. Ω) sternförmig durch U (bzw. Ω) einfach zusammenhängend ersetzt werden.

Def. (Jordankurve) Eine geschlossene Jordankurve in U ist eine zu $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| = 1\}$ homöomorphe Teilmenge $\mathcal{C} \subset U$.

Lemma 6.3 Sei $\gamma\colon [0,T] \to \mathcal{C}$ stückweise stetig differenzierbar, $\gamma(0) = \gamma(T)$, γ injektiv auf $[0,T)$. Dann gilt:

$$\gamma([0,T]) \cong S^1.$$

Satz 6.3 (Jordan'scher Kurvensatz) Sei $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Jordankurve. Dann gilt: $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C} = A \cup B$, dabei gilt:

- A und B sind disjunkt;
- A ist offen, beschränkt, einfach zusammenhängend;
- B ist offen, unbeschränkt, zusammenhängend;
- $\partial A = \partial B = \mathcal{C}$.

Folgerung. Im Residuensatz kann die Voraussetzung "Ω sternförmig" weggelassen werden.