Korollar 5.3 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, f auf U holomorph bis auf eine isolierte Singularität $z_0 \in U$. Falls f auf einer Kugel $B_\varepsilon(z_0)$ um z_0 beschränkt, ist z_0 hebbar.

Beweis Die explizite Formel für die Laurent-Koeffizienten c_n verwenden und elementar abschätzen. Für $n < 0$ sieht man unmittelbar, dass die hergeleitete obere Schranke für $\varepsilon \to 0$ gegen Null geht. (Details siehe VL.) Aus Korollar 5.1 a) folgt die Behauptung.

Korollar 5.4 (Satz von Casorati-Weierstrass) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, f auf U holomorph bis auf eine isolierte Singularität $z_0 \in U$. Dann ist das Bild jeder beliebig kleinen punktierten Kreisscheibe $B_\varepsilon(z_0) \backslash \{z_0\} \subseteq U$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis Angenommen die Konklusion wäre falsch. Also existiert eine zum Bild der punktierten Kreisscheibe disjunkte Kugel $B_\delta(w)$. Betrachte die Funktion $\frac{1}{f(z)-w}$ und wende den Riemann'schen Hebbarkeitssatz an. (Details siehe Übung.)

Satz 4.3 (Residuensatz) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, f bis auf isolierte Singularitaeten in U holomorph. Sei $\Omega \subset U$ eine offene, beschraenkte, sternfoermige Menge, deren Rand $\partial\Omega$
(i) in U enthalten ist,
(ii) keine Singularität enthält, und
(iii) durch eine stückweise stetig diff'bare, auf $[0, T)$ injektive, geschlossene Kurve $\gamma : [0, T] \to U$ gegeben ist.
Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S} \mathrm{Res}_{z_0} f,$$

wobei S die Menge der isolierten Singularitäten von f in Ω bezeichnet.

Im Fall einer holomorphen Funktion ohne Singularitäten reduziert sich der Residuensatz auf den Cauchy'schen Integralsatz. Die Voraussetzung der Sternförmigkeit von Ω ist - wie schon im Cauchy'schen Integralsatz - wichtig, allerdings nicht optimal; eine Verallgemeinerung werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen. Die Voraussetzung der Injektivität von γ auf $[0, T)$ ist ebenfalls wichtig, ansonsten könnte γ z.B. den Rand von Ω 2mal umlaufen, wodurch sich offensichtlicherweise der Wert des Integrals verdoppeln würde. Eine Version des Residuensatzes, bei dem mehrfaches Umlaufen von Singularitäten erlaubt ist, werden wir noch kennenlernen.

Spektakuläres, zentrales, und typisches Beispiel zum Residuensatz. *Dieses Beispiel illustriert den - zunächst überraschenden - Nutzen des gesamten Gebietes der Funktionentheorie, d.h. der Erweiterung von Funktionen von $\mathbb{R}$ auf die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$, für Fragestellungen der reellen Analysis, die zunächst einmal nichts mit $\mathbb{C}$ zu tun zu haben scheinen.*

Wir bestimmen das reelle Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Dazu betrachten wir den Integranden nicht nur auf $\mathbb{R}$, sondern auf $\mathbb{C}$, d.h. die

Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Offenbar ist f auf ganz $\mathbb{C}$ bis auf isolierte Singularitäten, nämlich die beiden Nennernullstellen $z_0 = \pm i$, holomorph. Wir integrieren nun im Komplexen "um die obere Singularität herum", genauer: über den Rand der oberen Halbkreisscheibe vom Radius R, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$. Nach Residuensatz gilt für $R > 1$

$$\int_{\partial\Omega} f = 2\pi i \operatorname{Res}_i f.$$

Für $R \to \infty$ geht das Integral über $[-R, R]$ gegen I, und das Integral über den verbleibenden Teil des Randes (d.h. den oberen Halbkreisbogen) gegen 0. Das Residuum ist in unserem Fall wegen $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{z+i}$ gleich dem Wert des zweiten Faktors bei $z_0 = i$, d.h. gleich $\frac{1}{2i}$. Insgesamt folgt $I = \pi$.

Unsere Argumentation zeigt, dass der Wert des reellen Integrals durch die Singularitäten des Integranden im Komplexen bestimmt ist (!) und auf systematische Weise explizit berechnet werden kann. Dieselbe Vorgehensweise funktioniert für beliebige rationale Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$*, wobei* p *und* q *Polynome,* q *nullstellenfrei auf* $\mathbb{R}$*, und* $deg(q) \geq deg(p) + 2$ *- anderenfalls waere das Integral nicht konvergent.*

6 Topologische Begriffe für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Grob gesprochen: "topologische Eigenschaft" = invariant unter bi-stetigen invertierbaren Abbildungen.

In den folgenden Definitionen ist U eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Insbesondere braucht U nicht offen zu sein, U könnte niedrigdimensional sein (z.B. eine Kurve im $\mathbb{R}^2$), oder U könnte hochgradig irregulär sein, z.B. fraktal.

Def. (Relativ offen) Eine Teilmenge A von U heisst *relativ offen in* U, wenn eine offene Menge $\tilde{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, sodass $A = \tilde{A} \cap U$.

Def. (Zusammenhängend) U heisst *zusammenhängend*, wenn U nicht in zwei relativ offene, disjunkte, und nichtleere Teilmengen zerlegt werden kann, d.h. wenn keine relativ offenen Teilmengen A, B von U existieren sodass $U = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

Def. (Wegzusammenhängend) U heisst *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte p, $q \in U$ eine stetige Funktion $\gamma : [0, T] \to U$ (d.h. eine "stetige Kurve") gibt mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(T) = q$.

Lemma 6.1 Falls $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, gilt:

$$U \text{ zusammenhängend } \Longleftrightarrow U \text{ wegzusammenhängend.}$$

Dieses Lemma wird in der Topologie bewiesen, und liegt jenseits der Reichweite der Methoden der Funktionentheorie.

Def. (Gebiet) U heissst *Gebiet*, wenn U offen und zusammenhängend (oder, wg. Lemma 6.1 äquivalent dazu, offen und wegzusammenhängend).