5 Singularitäten, Laurent-Reihen, Residuen

Der Integrand in der Cauchy'schen Integralformel ist im Inneren des Integrationsgebietes *nicht* holomorph, wegen des singulaeren Faktors $\frac{1}{z-a}$. Trotzdem haben wir das Kurvenintegral dieses Integranden betrachtet. Und gerade deshalb kommt ein interessanter Wert heraus - naemlich nicht Null (was nach Cauchy'schem Integralsatz bei holomorphem Integrand herausgekommen waere)! Ein natuerlicher naechster Schritt in der Theoriebildung ist somit die systematische Untersuchung des Kurvenintegrals in der Praesenz von "Singularitaeten". Sobald dies vollbracht ist, ernten wir auch aus Anwendungssicht schoene Fruechte, naemlich eine spektakulaere Methode zur Auswertung zahlreicher reeller Integrale, die sich der Auswertung mittels Analysis 1/2 (Hauptsatz, Subsitutionsregel, partielle Integration) entziehen.

Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt z_0 **isolierte Singularität von** f**.**

Definition Eine isolierte Singularität $z_0 \in U$ von f heißt

a) **hebbar**, wenn eine Zahl $f(z_0) \in \mathbb{C}$ existiert, sodaß $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar ist.

b) **Pol**, wenn Sie nicht hebbar ist, aber ein $m \geq 1$ existiert, sodaß $(z - z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singularität hat. Das kleinste solche m heißt **Ordnung** des Poles.

c) **wesentliche Singularität**, wenn sie weder hebbar noch ein Pol ist.

Beispiele: a) $f(z) = z^2$ für $z \neq 0$, b) $f(z) = 1/z^2$ für $z \neq 0$, c) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$.

Definition Ist eine Funktion f bis auf Pole holomorph in U, so heißt sie **meromorph in** U.

Satz 5.1 Sei U offen und zusammenhängend $g, h : U \to \mathbb{C}$ holomorph, h nicht konstant Null. Dann ist die Funktion f, die aus

$$\frac{g(z)}{h(z)}$$

nach Hebung aller hebbaren Singularitäten entsteht, meromorph.

In der Sprache der Algebra ist die Menge der meromorphen Funktionen auf U somit ein Körper, mit punktweiser Addition und punktweiser Multiplikation. Hierbei ist das inverse Element von f durch die Funktion $1/f$ gegeben, und – wie in den aus LADS bekannten Körperaxiomen gefordert – alle f's ausser dem neutralen Element der Addition (d.h. der Nullfunktion) besitzen ein inverses Element.

Satz 5.2 (Laurentreihenentwicklungssatz) Sei $f : \{z \in \mathbb{C} \big| r < |z - z_0| < R\} \to \mathbb{C}$ holomorph für $r \geq 0, R > r$. Dann gilt in diesem Kreisring:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad (*)$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad \rho \in (r, R),$$

wobei die Reihe lokal gleichmässig (d.h. gleichmässig in $r+\delta \leq |z| \leq R-\delta$ für jedes $\delta > 0$) konvergiert.

Definition Die Reihe (*) heißt **Laurentreihe**. Der Koeffizient c_{-1} heißt **Residuum** von f bei z_0, Schreibweise: $Res_{z_0} f$.

Beispiel: $\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + ...$ Laurentreihe um 0.

Korollar 5.1 (Klassifikation isolierter Singularitäten) Sei $f : B_R(0) \backslash \{z_0\}$ holomorph. Dann ist z_0
a) hebbar $\Longleftrightarrow c_n = 0$ für alle $n < 0$
b) Pol m^{ter} Ordnung $\Longleftrightarrow c_{-m} \neq 0$, $c_n = 0$ für alle $n < -m$
c) wesentliche Singularitaet $\Longleftrightarrow$ es gibt eine Teilfolge $n_k \to -\infty$ mit $c_{n_k} \neq 0$.

Beispiel: $\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - +....$ Also alle negativen ungeraden Laurent-Koeffizienten ungleich Null, somit 0 wesentliche Singularität.

Korollar 5.2 (Fourierreihenentwicklung) Sei f auf dem Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < b\}$ holomorph für ein $b > 0$, und sei f 2π-periodisch, d.h. $f(z+2\pi) = f(z)$ für alle $z \in S$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inz} \quad \text{für alle } z \in S$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int} dt \text{ (reelles Integral)}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

wobei die Reihe lokal gleichmässig (d.h. gleichmässig in $|z| \leq b'$ für alle $b' < b$) konvergiert.

Beweis 1) Die Abbildung $z \mapsto e^{iz}$ bildet S surjektiv und lokal-injektiv auf den Kreisring $K = \{e^{-b} < |z| < e^b\}$ ab.
2) Definiere eine holomorphe Funktion g auf K durch $g(e^{iz}) = f(z)$. Genauer: $g(w) = f(\frac{1}{i} \log z)$, und die Definition hängt nicht davon ab, welchen log man verwendet, denn $e^{iz} = e^{iz'}$ genau dann, wenn $z - z' \in 2\pi\mathbb{Z}$, und somit $f(z) = f(z')$.
3) Fourier für f = Laurent für g
(elementares Auswerten der Integraldarstellung der Laurent-Koeff. in Satz 5.2).