4 Cauchy'sche Integralformel und Folgerungen

Die Integrationstheorie bisher war reichlich abstrakt, jetzt wird es konkreter. Eine zentrale Folgerung dieser Theorie ist, dass die Werte holomorpher Fuktionen im Inneren eines Gebiets aus den "Randwerten" rekonstruierbar sind. Vielleicht kennen Sie aehnliche Aussagen aus dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen, oder werden solche Aussagen in spaeteren Semestern kennenlernen. Eine zweite zentrale Folgerung der Integrationstheorie ist eine "Klassifikation" aller lokal (d.h. in der Naehe eines gegebenen Punktes) holomorphen Funktionen: die einzigen solchen Funktionen sind die Potenzreihen! Letztere wurden in Analysis 1 ad hoc eingefuehrt (ad hoc kann man alle moeglichen Funktionenklassen einfuehren, wenn der Tag lang ist), hier sehen wir, dass sie sich auf natuerliche Weise ergeben, naemlich als lokale Loesungsmenge der CR-Gleichungen.

Satz 4.1 (Cauchy'sche Integralformel) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $r > 0$, $\overline{B_r(z_o)} \subset U$. Dann gilt für alle $a \in B_r(z_0)$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Korollar 4.1 (Mittelwertsatz) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$.

Satz 4.2 Potenzreihenentwicklungssatz Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $R > 0$, $B_R(z_0) \subset U$.

a) $\exists a_n \in \mathbb{C}, n = 0.1.2...$, sodaß$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \forall z \in B_R(z_0)$, wobei die rechte Seite eine konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius $\geq R$ ist

b) Die a_n sind gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \ (0 < r < R),$$

insbesondere sind sie eindeutig.

Korollar 4.2 (Äquivalente Charakterisierung homorpher Funktionen) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) f holomorph (gut)

(ii) f beliebig oft komplex differenzierbar (besser)

(iii) f an jedem Punkt $z_0 \in U$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar (noch besser) [d.h. $\exists a_n \in \mathbb{C}, R > 0$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ in $B_R(z_0)$]

Satz 4.3 (Satz von Liouville)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $|f(z)| \leq M$ auf $\mathbb{C}$.
Dann ist f konstant.