c) Reelles Kurvenintegral

Ziel dieses Abschnittes ist die Beantwortung folgender natuerlicher Fragen zum fundamentalen Cauchy'schen Integralsatz:
1) Analogon im $\mathbb{R}^n$?
2) Beweis, der nicht vom Himmel fällt?
3) Was passiert, wenn f nicht holomorph, sondern nur reell stetig diff'bar?

Def.: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $V : U \to \mathbb{R}^n$ stetig, $\gamma : [a,b] \to U$ s.s.d. Kurve. Das *reelle Kurvenintegral* von V über γ ist definiert als

$$\int_\gamma V \cdot ds = \int_a^b V(\gamma(t) \cdot \gamma'(t)\, dt \in \mathbb{R}.$$

Wie im Komplexen gilt: Das Kurvenintegral ist invariant unter richtungsehaltenden Umparametrisierungen von γ, und ändert das Vorzeichen bei Richtungsumkehr.

Ein komplexes Kurvenintegral entspricht 2 reellen Kurvenintegralen (Real- und Imaginärteil des komplexen Kurvenintegrals sind reelle Kurvenintegrale): sei $f = u + iv$, dann

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma X \cdot ds + i \int_\gamma Y \cdot ds \text{ mit } X = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} (= \overline{f}), \quad Y = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} (= i\overline{f})$$

Bemerkung: Eine Abbildung von einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ (d.h. Defitnitions- und Wertebereich haben selbe Dimension) wird oft *Vektorfeld* genannt.

Satz 3.2 *(Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, $V : U \to \mathbb{R}^n$ (reell) stetig diff'bares Vektorfeld. Sei*

$$(*) \quad DV(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial V_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial V_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \text{ symmetrisch für alle } x \in U.$$

Dann gilt:

$$\int_\gamma V \cdot ds = 0 \text{ für jede s.s.d. geschlossene Kurve } \gamma : [a,b] \to U.$$

In 2D bzw. 3D ist die Bedingung (*) trivialerweise äquivalent zu $curl\, V = 0$, wobei

$$curl \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} := \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1} V_2 - \tfrac{\partial}{\partial x_2} V_1 \right) \quad (d = 2),$$

$$curl \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} := \text{"}det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix}\text{"} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} V_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} V_2 \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} V_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} V_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} V_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} V_1 \end{pmatrix} \quad (d = 3).$$

Der Ausdruck *curl* V heisst *Rotation* des Vektorfeldes V, und wird in der deutschsprachigen Literatur oft mit *rot* V bezeichnet. Die symbolische Determinantenformel in Anführungszeichen sollte nicht als strenge mathematische Notation missverstanden werden, sondern ist eine Merk-Regel.

Herleitung des Cauchy'schen Integralsatzes aus Satz 3.2: Aufgrund der Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllen die beiden reellen Vektorfelder aus obiger Zerlegung des komplexen Kurvenintegrals die Gleichungen $curl\, X = 0$, $curl\, Y = 0$.

Beweis von Satz 3.2 durch Homotopieargument: betrachte die folgende Abbildung $h : [0,1] \times [a,b] \to U$ ("Homotopie"), die die Kurve γ stetig zum Zentrum c des Sterngebiets U zusammenzieht:

$$h(r,t) = (1-r)c + r\gamma(t).$$

Offenbar gilt $h(0,\cdot) = c$, $h(1,\cdot) = \gamma$, und eine elementare Rechnung zeigt

$$\int_\gamma V\cdot ds = \int_{r=0}^1 \Big(\frac{d}{dr}\int_{h(r,\cdot)} V\cdot ds\Big) dr = \int_{s=0}^1 \int_{t=a}^b \Big\langle (DV(h(s,t)) - DV(h(s,t))^T)\frac{d}{ds}h,\ \frac{d}{dt}h\Big\rangle dt\, ds.$$

Dieser Ausdruck ist Null, denn der Integrand verschwindet punktweise wegen (*).

Obige Darstellung des Kurvenintegrals als 2D Integral über die von der Homotopie überstrichene Fläche bleibt gültig, wenn die Forderung (*) fallengelassen wird. Eine genauere Analyse der rechten Seite im Fall $n = 2$ (siehe VL) ergibt ein hochinteressantes Resultat:

Satz 3.3 *(Satz von Stokes in 2D) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $V : U \to \mathbb{R}^2$ reell stetig diff'bar. Sei $\gamma : [a,b] \to U$ s.s.d. geschlossene Kurve, γ injektiv auf (a,b), und $\gamma([a,b]) = \partial\Omega$ für eine sternförmige Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, umlaufen im mathematisch positiven (d.h. Gegenuhrzeiger-) Sinn. Dann gilt:*

$$\int_\gamma V \cdot ds = \int_\Omega curl\, V(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$