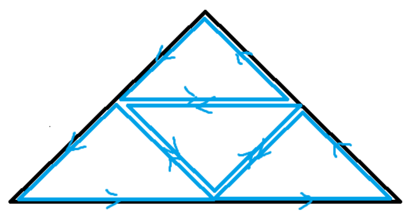
[noch: Abschnitt 3 ‘Kurvenintegral’]

Beweis des Lemmas von Goursat (L 3.3)[1] Idee: Zerlege das Kurvenintegral um das Dreieck Δ in eine Summe vieler Kurvenintegrale um *kleine* Dreiecke; da holomorph = komplex differenzierbar = lokal affin-linear approximierbar, lässt sich das Kurvenintegral von f um ein kleines Dreieck gut durch ein Kurvenintegral einer affin-linearen Funktion approximieren (z.B. des Taylorpolynoms ersten Grades von f am Dreiecksmittelpunkt); affin-lineare Funktionen besitzen aber eine Stammfunktion, was das Verschwinden von deren Kurvenintegralen impliziert (siehe Lemma 3.2). Das ursprüngliche Kurvenintegral reduziert sich also auf eine Summe vieler Kurvenintegrale kleiner Approximationsfehler über kleine Dreiecke. Die technische Hauptarbeit im Beweis besteht darin, die Vokabeln "viele" und "kleine" zu quantifizieren. Wir werden zeigen, dass bei feinerem und feinerem Zerlegen des ursprünglichen Dreiecks die Anzahl Teildreiecke langsamer wächst, als die Grösse der einzelnen Terme abfällt, sodass die Summe als klein erkannt werden kann.

a) Zerlegung des Kurvenintegrals um Δ: Seien $\Delta_1^{(k)}$ $(k = 1, .., 4)$ die vier kongruenten Teildreiecke, die sich aus $\Delta_0 := \Delta$ durch Verbinden der Seitenmittelpunkte ergeben (siehe Skizze).



Diese Zerlegung lässt sich iterieren. Seien $\Delta_2^{(k)}$ $(k = 1, .., 4^2)$ die kongruenten Teildreicke durch Verbinden der Mittelpunkte der neuen Seiten, usw. Nach n Schritten erhält man 4^n kongruente Teildreiecke $\Delta_n^{(k)}$, $k = 1, ..., 4^n$. Offensichtlich ist

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4^n} \int_{\partial\Delta_n^{(k)}} f(z)\,dz,$$

denn die Beiträge der inneren Seitenlinien heben sich weg.

b) Taylorapproximation: für jedes Teildreieck $\Delta_n^{(k)}$ wählen wir einen Punkt $c \in \Delta_n^{(k)}$

[1] Ausnahmsweise weiche ich hier von der exzellenten Funktionentheorie-Literatur etwas ab, daher ist der Beweis im Kurzskript angegeben. Der Standardbeweis in der Literatur verläuft zwar ähnlich, enthält aber nach meinem Geschmack etwas zu viel Trickserei [ich meine die Auswahl und das Studium einer Folge spezieller Teildreiecke], was meines Erachtens die eigentliche Beweisidee teilweise obskuriert. [Für Experten: Durch die Teildreiecks-Trickserei wird die benoetigte Hilfsaussage, dass die Fehlerfunktion g gleichmässig klein ist, nur scheinbar umgangen; in Wirklichkeit wird sie implizit mitbewiesen, und zwar einerseits in einer merkwürdig speziellen Situation – sie hat weder mit Dreiecken noch mit Holomorphie zu tun, sondern ist ein Beispiel des allgemeinen Prinzips "stetig $\Longrightarrow$ gleichmässig stetig" – und andererseits ohne den Beweis dieses Prinzips zu vereinfachen.]

(z.B. den Dreiecksmittelpunkt) und entwickeln dort wie folgt:

$$f(z) = \underbrace{f(c) + f'(c)(z-c)}_{\text{besitzt Stammfkt.}} + \underbrace{g(z,c)(z-c)}_{\text{klein}}, \quad g(z,c) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(c)}{z-c} - f'(c), & z \neq c \\ 0 & z = c \end{cases}.$$

Da die ersten beiden Terme eine Stammfunktion besitzen, folgt

$$\int_{\partial\Delta_n^{(k)}} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n^{(k)}} g(z,c)(z-c)\,dz.$$

Die Holomorphie von f besagt genau, dass $g(z,c) \to 0$ $(z \neq c,\ z \to c)$. D.h. $g : U \times U \to \mathbb{C}$ stetig. Auf $\Delta \times \Delta$ ist g somit sogar gleichmässig stetig (denn stetige Funktionen sind auf kompakten Mengen gleichmässig stetig, siehe Analysis 1/2). D.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ sodass $|g(z,c) - g(z',c')| < \varepsilon$ sofern $|(z,c) - (z',c')| < \delta$, z,c,z',$c' \in \Delta$. Insbesondere gilt

$$|g(z,c) - \underbrace{g(c,c)}_{=0}| < \varepsilon \quad \text{für alle } z, c \in \Delta \text{ mit } |z-c| < \delta.$$

Wenn n hinreichend gross und z, c im selben Teildreieck $\Delta_n^{(k)}$, ist obige Bedingung erfüllt, also folgt

$$\sup_{z,\,c \in \Delta_n^{(k)}} |g(z,c)| < \varepsilon.$$

Erste, dritte und fünfte Gleichung sowie die elementargeometrischen Tatsachen $diam\,\Delta_n^{(k)} = 2^{-n} diam \Delta_0$ und $L(\partial\Delta_n^{(k)}) = 2^{-n} L(\partial\Delta_0)$ (wobei $L(\gamma) =$ Länge des Integrationsweges γ) ergeben zusammengenommen

$$|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz| \leq 4^n \cdot 2^{-n} L(\Delta_0) \cdot 2^{-n} diam\,\Delta_0 \cdot \epsilon.$$

Da ε beliebig, folgt linke Seite $= 0$, was zu zeigen war.

Beweis des Lemmas von Poincaré (L 3.4): Die Stammfunktion lässt sich explizit als Kurvenintegral konstruieren,

$$F(z) := \int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta,$$

wobei c ein Punkt ist, bezüglich dem U sternförmig ist, sodass die Strecke $[c,z]$ für jedes $z \in U$ vollständig in U liegt. Verifikation, dass $F' = f$: Differenzenquotienten betrachten, die beiden Argumente von F untereinander und mit c verbinden, Goursat auf dieses Dreieck anwenden, siehe VL.