[noch: Abschnitt 2 'Cauchy-Riemann-Gleichungen']

d) Holomorphe Funktionen sind harmonisch

Definition Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Eine 2mal stetig diff'bare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst *harmonisch*, wenn

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x_1, .., x_d) = 0 \text{ für alle } x = (x_1, .., x_d) \in \Omega.$$

Satz 2.2 *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $u := Re\, f$ und $v := Im\, f$ 2mal stetig diff'bar. Dann gilt: u, v harmonisch.*

Beispiele: 1) affin lineare Funktionen $u(x, y) = ax + by + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, harmonisch (direkt aus Def. harmonischer Funktionen)

2) $u(x, y) = x^2 - y^2$ harmonisch, denn $u = Re(z^2)$

3) $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ harmonisch auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, denn $u = Re \log z$

3 Kurvenintegral

a) Wiederholung: Integration komplex-wertiger Funktionen über Intervalle in $\mathbb{R}$: für $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$, f stetig, ist

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b (\mathrm{Re}\, f(t)\, dt + i \mathrm{Im}\, f(t)\, dt.$$

b) Integration über Kurven in $\mathbb{C}$

Definition Eine Funktion $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heisst *stückweise stetig diff'bare Kurve*, wenn γ stetig und wenn $t_0, ..., t_N$ existieren sodass $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ und $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ stetig diff'bar für alle $j = 1, .., N$. Eine stückweise stetig diff'bare Kurve γ heisst *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma : [a, b] \to U$ stückweise stetig diff'bare Kurve. Das *komplexe Kurvenintegral von f über γ* ist definiert als

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \quad \in \quad \mathbb{C}.$$

Beispiel: Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1 - t)z + tw$ (Strecke von z nach w), $f = 1$, dann $\int_\gamma 1\, dz = w - z$. Das Kurvenintegral ist hier (wie bei Integration über reelle Intervalle) die Differenz der Endpunkte.

Wichtige Eigenschaft: Das Kurvenintegral ändert sich nicht durch Umparametrisierung:

falls $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b} \to [a,b]$ C^1-Diffeomorphismus, $\varphi(\tilde{a}) = a$, $\varphi(\tilde{b}) = b$, gilt für die Kurve $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(\varphi(t))$:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Wichtige Folgerung: Falls eine Menge $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ die Form $\mathcal{C} = \gamma([a,b]) = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ für eine auf dem offenen Intervall (a,b) injektive, stückweise stetig differenzierbare Kurve γ besitzt, und falls zudem festliegt, in welcher Richtung $\mathcal{C}$ durchlaufen wird, können wir definieren:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz := \int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Ändern wir die Durchlaufrichtung, kehrt sich das Vorzeichen um. D.h. das Kurvenintegral hängt bis auf die Durchlaufrichtung nur von der Menge $\mathcal{C}$ und nicht deren Parametrisierung durch eine Kurve γ ab.

Konvention in der Funktionentheorie: Megen, die das Bild einer geschlossenen Kurve sind, werden – sofern nicht anders angegeben – im *Gegenuhrzeigersinn* (auch *mathematisch positiver Sinn* genannt) parametrisiert.

Lemma 3.1 *Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichne $\overline{B_r(z_0)}$ (in üblicher Notation) die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$. Dann gilt für $\mathcal{C} = \partial B_r(z_0)$, durchlaufen im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn):*

$$\begin{aligned} &a) \qquad \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i \\ &b) \qquad \int_{\mathcal{C}} (z - z_0)^k dz = 0, \;\; k \in \mathbb{Z}, \;\; k \neq -1. \end{aligned}$$

Einer der vielen höchst bemerkenswerten Aspekte dieser Aussage: das Kurvenintegral hängt nicht vom Radius r ab!!!

Folgerung: p Polynom, $\mathcal{C}$ wie oben $\Longrightarrow \int_{\mathcal{C}} p(z)\, dz = 0$.

Definition Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. $F : U \to \mathbb{C}$ heisst *Stammfunktion* von f in U, falls gilt: F holomorph, $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in U$.

Lemma 3.2 *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:*

f besitzt Stammfkt. in $U \Longrightarrow$ $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jede stückweise stetig diff'bare geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to U$.

Beweis: straightforward (Kettenregel und Hauptsatz, siehe VL).

Beispiel: für $k \neq -1$ besitzt $(z - z_0)^k$ die Stammfunktion $\frac{1}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$, d.h. Lemma 3.1 b) folgt aus Lemma 3.2.

Lemma 3.3 *(Lemma von Goursat) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann gilt:*

$$f\ :\ U \to \mathbb{C} \textit{ holomorph} \Longrightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \textit{ für jedes Dreieck } \Delta \subset U.$$

(Ein Dreieck ist die konvexe Hülle $\{\sum_{j=1}^{3} \lambda_i z_i\ :\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \sum_{j=1}^{3} \lambda_j = 1\}$ dreier nicht collinearer Punkte $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$.)

Definition Eine Menge $U \subseteq C$ heisst *sternförmig*, wenn ein $c \in U$ existiert, sodass für alle $z \in U$ die Strecke $[c, z] := \{(1-t)c + tz\ :\ t \in [0,1]\}$ in U liegt.

Anschaulich: hinreichende Bedingung dafür, dass U keine "Löcher" besitzt

Beispiel: $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$ ist nicht sternförmig.

Lemma 3.4 *(Version des Lemmas von Poincaré) Sei $U \subseteq C$ offen, $f\ :\ U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:*

$$\begin{array}{c} U \textit{ sternförmig,} \\ \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \textit{ für jedes Dreieck } \Delta \subset U \end{array} \Longrightarrow f \textit{ besitzt Stammfkt. in } U.$$

Satz 3.1 *(Cauchy'scher Integralsatz) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann gilt:*

$$\begin{array}{c} U \textit{ sternförmig,} \\ f : U \to \mathbb{C} \textit{ holomorph} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \int_\gamma f(z)dz = 0 \textit{ für jede stückweise stetig} \\ \textit{diff'bare geschlossene Kurve } \gamma\ :\ [a,b] \to U. \end{array}$$

Beweis: Der Reihe nach Lemma 3.3, Lemma 3.4, Lemma 3.2 anwenden.