2 Die Cauchy-Riemann-Gleichungen

Eine holomorphe Funktion kann (wegen der Gleichheit von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ als Mengen) als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden. In diesem Abschnitt klären wir den Zusammenhang zwischen Holomorphie und reeller Differenzierbarkeit dieser Abbildung.

a) Lineare Abbildungen

Lemma 2.1 *Eine reelle 2×2 Matrix* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *entspricht genau dann Multiplikation mit einer komplexen Zahl, wenn* $d = a$, $c = -b$, *d.h. wenn die Matrix die Form* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *hat. In diesem Fall entspricht sie Multiplikation mit der Zahl* $c = a + ib$.

Geometrische Interpretation: Die Abbildung $z \mapsto cz$ ist eine "Drehstreckung": sei $c \neq 0$, $c = \alpha e^{i\beta}$ (Polardarstellung), so entspricht die Abbildung der Drehung der komplexen Ebene um den Winkel β gefolgt von der Streckung/Stauchung um den Faktor $\alpha > 0$.

b) Nichtlineare Abbildungen

Satz 2.1 *Sei* $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* $f : U \to \mathbb{C}$. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) f *holomorph*

(ii) $u := Re\, f, v := Im\, f$ *reell stetig differenzierbar, und* $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array}\right\}$ *in* U

(Cauchy-Riemann-Gleichungen)

Zusatz: Falls (i) und (ii) erfüllt, ist die komplexe Ableitung gegebnen durch $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Beispiele:

1) $f(z) = z$: $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$, CR-Gleichungen erfüllt

2) $f(z) = z^2$: $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$, CR-Gleichungen erfüllt

3) $f(z) = exp(z)$: CR-Gleichungen erfüllt (wg. $exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$, d.h. $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$, und $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$)

4) $f(z) = \overline{z}$: $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$, CR-Gleichungen nicht erfüllt. Allgemeiner: Sei f die allgemeine lineare Abbildung

$$f(z) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dann ist $u(x, y) = ax + cy$, $v(x, y) = bx + dy$. Die CR-Gleichungen lauten folglich: $a = d$, $b = -c$. Die CR-Gleichungen reduzieren sich also genau auf die Bedingung aus Lemma 2.1. Anders gesagt: eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann holomorph, wenn sie Multiplikation mit einer komplexen Zahl entspricht.

c) Logarithmus im Komplexen Im Reellen ist die Exponentialfunktion streng monoton steigend, und ihr Wertebereich ist genau $\mathbb{R}^+$. Die Gleichung $e^w = z$ besitzt folglich für nichtpositive z *keine*, und für positive z *genau eine* Lösung $w \in \mathbb{R}$. Diese Lösung heisst Logarithmus.

Im Komplexen gilt für die Exponentialfunktion $\exp(z)$ (siehe VL1) Folgendes: Die Gleichung $e^w = z$ besitzt für $z = 0$ *keine*, und für $z \neq 0$ *unendlich viele* Lösungen, nämlich

$$w = \log(|z|) + i \arg(z) + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(Insbesondere ist der Wertebereich der Exponentialfunktion gleich $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.) Hierbei ist arg die für $z \neq 0$ definierte *Argumentfunktion*: $\arg(z) :=$ diejenige Zahl $\varphi \in (-\pi, \pi]$ sodass $z = |z|e^{i\varphi}$. Die Lösung für $k = 0$ heisst *Hauptwert* des Logarithmus, und die zugehörige Funktion

$$\log : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, \quad \log(z) := \log(|z|) + i \arg(z)$$

heisst *Hauptzweig* des Logarithmus. Vorsicht: log unstetig auf der negativen reellen Halbachse $\mathbb{R}_0^- = \{z \in \mathbb{C} \ : \ Im\, z = 0, \ Re\, z \leq 0\}$. Real- und Imaginärteil sind gegeben durch

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$$

(zumindest in der offenen rechten Halbebene $x > 0$; in der offenen oberen bzw. der offenen unteren Halbebene gelten ähnliche Darstellungen für den Imaginärteil $\arg(z)$). Die partiellen Ableitungen von u und v in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ können explizit bestimmt werden. Durch Inspektion der erhaltenen Ausdrücke sieht man, dass die CR-Gleichungen erfüllt sind, und die Formel für f' aus Satz 2.1 zeigt, dass – analog zum Reellen – die Ableitung durch $1/z$ gegeben ist. Es gilt also

$$\log \ \text{holomorph auf } \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-, \quad \log'(z) = \frac{1}{z}.$$