8 Holomorphie und Winkeltreue

Satz 8.1 Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und seien $c, d : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{C}$ differenzierbare Kurven mit $c(0) = d(0) = z_0$, $\dot{c}(0) = \dot{d}(0) \neq 0$. Sei f holomorph in einer Umgebung von z_0, $f'(z_0) \neq 0$. Sei $\varphi_{z_0} := arccos \frac{\dot{c}(0)}{|\dot{c}(0)|} \cdot \frac{|\dot{d}(0)}{\dot{d}(0)|} \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen c und d.

Seien $\tilde{c}(z) := f(c(t)), \tilde{d}(t) := f(d(t))$ die Bildkurven, $\tilde{z}_0 := f(z_0)$. Dann gilt:

$$\varphi_{z_0}(c, d) = \varphi_{\tilde{z}_0}(\tilde{c}, \tilde{d}).$$

d.h. der Winkel zwischen c und d bleibt unter der Abbildung f erhalten.

9 Biholomorphe Abbildungen

Wir wissen aufgrund der lokalen Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen, dass diese auf jeder offenen Menge einen *unendlich-dimensionalen* Vektorraum bilden. Hochinteressanterweise bilden jedoch die bi-holomorphen Abbildungen zwischen zwei gegebenen Mengen typischerweise nur eine *endlichdimensionale* Menge, die sich fuer einfache Mengen exakt bestimmen laesst.

Definition a) Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : U \to V$ heisst **biholomorph**, wenn

- f bijektiv,
- f, f^{-1} holomorph.

b) Eine biholomorphe Abbildung $f : U \to U$ (d.h. Definitions- und Wertebereich sind gleich) heisst **Automorphismus** von U.

c) Die Automorphismen von U bilden offensichtlich eine Gruppe unter Verkettung, diese wird mit $Aut(U)$ bezeichnet.

Beispiel einer biholomorphen Abbildung Die Cayley-Abbildung

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

bildet die obere Halbebene H biholomorph auf die Einheitskreisscheibe D ab, wobei

$$H = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Die Inverse der Cayley-Abbildung ist

$$C^{-1}(z) = i\frac{1 + z}{1 - z}.$$

Satz 9.1 (Automorphismengruppe von komplexer Ebene, Einheitskreisscheibe, und oberer Halbebene)

a) $Aut(\mathbb{C}) = \{az + b \, : \, a, b \in \mathbb{C}, \, a \neq 0\}$
b) $Aut(D) = \{e^{i\varphi} \frac{z-w}{1-\overline{w}z} \, : \, w \in D, \, \varphi \in [0, 2\pi)\}$
c) $Aut(H) = \{\frac{az+b}{cz+d} \, : \, \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})\}$. Hierbei bezeichnet $SL(2, \mathbb{R})$ die Gruppe der reellen 2x2 Matrizen mit Determinante 1.

Um a) zu beweisen, benutzt man folgendes Lemma:

Lemma 9.1 (Verallgemeinerter Satz von Liouville) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $|f(z)| \leq C(1 + |z|^m)$ fuer ein ganzzahliges $m \geq 0$ und eine Konstante $C > 0$. Dann ist f Polynom vom Grad $\leq m$.

Man untersucht nun fuer gegebenes $f \in Aut(\mathbb{C})$ die Funktion $g(z) = f(1/z)$. Diese Funktion ist offensichtlich holomorph in $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ und besitzt an der Stelle 0 eine isolierte Singularitaet. Mithilfe des klassischen Satzes von Liouville zeigt man, dass die Singularitaet nicht hebbar sein kann; mit hilfe des Satzes von Casorati-Weierstrass zeigt man, dass die Singularitaet auch nicht wesentlich sein kann. Mithilfe von Lemma 9.1 untersucht man den verbleibenden Fall eines Pols der Ordnung $m \in \mathbb{N}$.

Um b) zu zeigen, benutzt man folgende Aussage:

Lemma 9.2 (Schwarz'sches Lemma) Sei $f : D \to D$ holomorph und mittelpunktstreu (d.h. $f(0) = 0$). Dann gilt:
(i) $|f(z)| \leq |z|$ fuer alle $z \in D$
(ii) Gilt "$=$" fuer ein $z \in D$, ist $f(z) = e^{i\varphi} z$ fuer ein $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Um b) zu folgern, fuehrt man zunaechst den folgenden expliziten speziellen Automorphismus von D ein, der den Punkt $w \in D$ auf 0 abbildet

$$f_w(z) = \frac{z - w}{1 - \overline{w}z}.$$

Sei nun f ein allgemeiner Automorphismus. Setze $f(0) =: w$ und betrachte die Verkettung $g(z) = f_w(f(z))$. Diese ist mittelpunktstreu und die Behauptung folgt durch Anwenden des Schwarz'schen Lemmas.

Def. Funktionen der Form $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ heissen **Moebiustransformationen**.

Geometrische Bedeutung der Moebiustransformationen als Projektion der natuerlichen Operation von $GL(2, \mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^2$ auf komplexe Ursprungsgeraden im $\mathbb{C}^2$: siehe Vorlesung. Insbesondere folgt hieraus unmittelbar ohne Rechnung die Tatsache, dass sich die Koeffizienten der Verkettung oder der Inversen von Moebiustransformationen durch Matrizenmultiplikation bzw. Matrizeninversion berechnen lassen.

Satz 9.2 (Riemann'scher Abbildungssatz - ohne Beweis) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $G \neq \mathbb{C}$. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung $G \to \mathbb{D}$.