7 Identitaetssatz; Maximumprinzip

Viele auf $\mathbb{R}$ bekannte Funktionen wie e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1+x^2}$ wurden von uns auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt, indem wir $x \in R$ durch $z \in \mathbb{C}$ und Grundrechenarten in $\mathbb{R}$ durch Grundrechenarten in $\mathbb{C}$ ersetzt haben. Sind die so erhaltenen Funktionen auf $\mathbb{C}$ eigentlich eindeutig?

Satz 7.1 (Identitaetssatz) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet (d.h. offen und zusammenhaengend), $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind aequivalent:

1. $f(z) = g(z)$ fuer alle $z \in \mathbb{C}$
2. Die Menge $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$ besteht aus unendlich vielen Punkten, und besitzt einen Häufungspunkt in U
3. Es gibt ein $z \in U$ sodass $\frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{d^n}{dz^n} g(z)$ fuer alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, d.h. in einem Punkt stimmen die Funktionen und alle ihre Ableitungen ueberein.

Satz 7.2 U offen, $\Omega \subset U$ beschränktes Gebiet mit $\overline{\Omega} \subset U$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:
(a) Falls $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum besitzt, ist f konstant.
(b) $|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|$ fuer alle $z \in \overline{\Omega}$, d.h. $|f|$ nimmt sein Maximum in $\overline{\Omega}$ auf dem Rand an.