# Kurzskript zur Vorlesung Funktionentheorie

Prof. Gero Friesecke
Zentrum Mathematik, TU München

SoSe 2017

**Abstract**

Dieses Kurzskript ersetzt weder die Teilnahme an, noch die Mitschrift aus, der Vorlesung. Es enthält lediglich die Definitionen und Sätze der Vorlesung sowie eine Liste der besprochenen Beispiele, aber keine Erläuterungen der Definitionen, Beweise der Sätze oder Ausarbeitungen der Beispiele. Es ist als zuverlässiges Nachschlagewerk für erstere gedacht.

**Wiederholung: Komplexe Zahlen**

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist als Menge identisch mit dem $\mathbb{R}^2$. Komplexe Zahlen schreiben wir wahlweise in der Form

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

mit $x = \operatorname{Re} z$ (Realteil von $z$), $y = \operatorname{Im} z$ (Imaginärteil von $z$).

Addition:

$$z + z' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

Multiplikation (aus der Rechenregel $i^2 = -1$ herleitbar):

$$z \cdot z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx') = \begin{pmatrix} xx' - yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix}$$

Polardarstellung:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty) \text{ Absolutbetrag}, \quad \varphi \in \mathbb{R} \text{ Winkel}$$

Der Winkel $\varphi$ ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi$ eindeutig; Konvention in der Funktionentheorie: $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Die Polardarstellung ist nützlich zum Verständnis der Multiplikation: $zz' = rr'e^{i(\varphi+\varphi')}$ (Absolutbeträge multiplizieren, Winkel addieren)

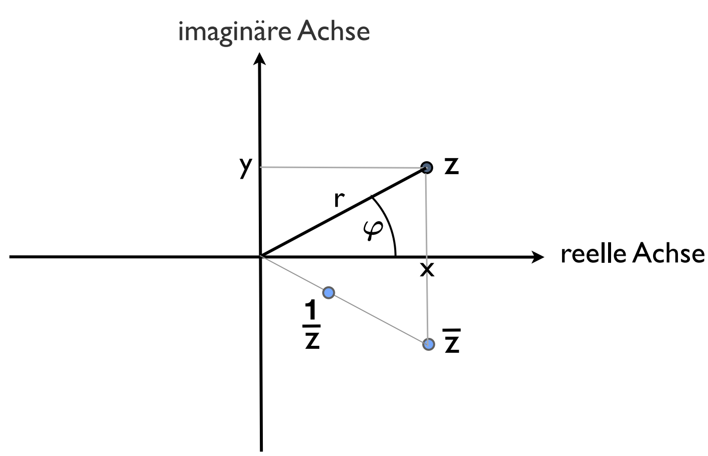
Konjugation: Sei $z = x + iy$, dann

$$\overline{z} := x - iy \quad \text{zu } z \text{ konjugierte Zahl (geometrisch: Spiegelung an der x-Achse)}$$

Die Konjugation ist nützlich zum Verständnis des Kehrwerts einer komplexen Zahl:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

d.h. der Kehrwert liegt auf der Halbgeraden von 0 durch $\overline{z}$.



# 1 Holomorphe Funktionen

**Definition 1.1** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt* **komplex differenzierbar** *an der Stelle $z_0$, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \tag{*}$$

*existiert. $f'(z_0)$ heißt* **Ableitung** *von $f$ im Punkt $z_0$. $f$ heißt* **holomorph** *auf $U$, wenn $f$ überall in $U$ komplex differenzierbar und $f' : U \to \mathbb{C}$ stetig.*

Grob gesagt: holomorph $\approx$ stetig diff'bar im Komplexen. Beachte aber: Division und Grenzübergang in (*) finden in $\mathbb{C}$ statt.

**Rechenregeln** Wie im Reellen gilt für komplex differenzierbare Funktionen $f$, $g$
(i) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ Linearität
(ii) (fg)' = f' g + f g' Produktregel
(iii) $(\frac{f}{g}') = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ falls $g \neq 0$ Quotientenregel
(iv) $h(z) := f(g(z)) \Longrightarrow h'(z) = f'(g(z))g'(z)$ falls $g : U \to V$, $f : V \to \mathbb{C}$ Kettenregel.

Beispiele:
1) $f(z) = c$ $(c \in \mathbb{C})$ holomorph, $f' = 0$
2) $f(z) = z$ holomorph, $f' = 1$
3) $f(z) = \overline{z}$ nirgends komplex differenzierbar
4) $f(z) = z^n$ holomorph, $f'(z) = nz^{n-1}$, denn

$$z^n - z_0^n = (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + ... + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1})(z - z_0)$$

(Beweis dieser Identität: rechte Seite ausmultiplizieren und bemerken, dass alle Terme ausser denen auf der linken Seite 2mal vorkommen, mit umgekehrtem Vorzeichen) und somit $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + ... + z_0^{n-1} \to n z_0^{n-1}$ für $z \to z_0$
5) $f(z) = \frac{1}{z^n}$ holomorph auf $\mathbb{C} \backslash \{0\}$, $f'(z) = -\frac{n}{z^{n+1}}$
6) Polynome $p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_n z^n$ $(a_0, .., a_N \in \mathbb{C})$ hol., $f'(z) = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}$ (wg.4) u.(i))
7) Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit Konvergenzradius $R := \sup\{|z| \, : \, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergent}\}$ holomorph im Konvergenzkreis $\{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| < R\}$, Ableitung = gliedweise Ableitung (wg. 6) und Schwanzsummenabschätzung, siehe VL)
8) $f(z) = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ holomorph auf $\mathbb{C}$
9) $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - +...$, $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - +...$ holomorph auf $\mathbb{C}$
10) $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - +...$, $g(z) = \frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + ...$ wegen 7) beide holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| < 1\}$. Aus Sicht der reellen Analysis überraschend, dass auch $f$ nur Konvergenzradius 1 hat, obwohl die Funktion - im Gegensatz zu $g$ - auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt und glatt ist. Erklärung mittels Funktionentheorie: $f(iz) = g(z)$, also hat $f$ "Singularitäten" bei $\pm i$.