Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Probeklausur

Functional Analysis

1. a) Geben Sie (ohne Begründung) an, welche der folgenden Mengen Banachräume sind.

(a) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$

(b) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

(c) $(\{a = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty | \lim\limits_{j\to\infty} a_j \text{ existiert } \}, \|\cdot\|_\infty)$

(d) $(\{a = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty | \lim\limits_{j\to\infty} a_j = 1\}, \|\cdot\|_\infty)$

(e) $(C[-1,1], \|\cdot\|_1)$, wobei $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)|dt$

(f) $(C^1([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$

b) Welche Inklusionsbeziehungen bestehen zwischen den obigen Räumen?

2. a) Definieren Sie den Begriff des dichten Unterraums eines normierten Vektorraums X.

b) Sei X ein normierter Vektorraum, $D \subset X$ dichter Unterraum, Y Banachraum, $A : X \to Y$, $Ax := \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{A}x_n$, wobei $\{x_n\} \subset D$ mit $x_n \to x$ und $\tilde{A} \in L(D,Y)$. Zeigen Sie: $A \in L(X,Y)$.

3. a) Definieren Sie die Begriffe punktweise beschränkt und gleichmäßig beschränkt für eine Familie $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ linearer Operatoren zwischen normierten Vektorräumen.

b) Formulieren Sie den Satz von Banach-Steinhaus.

c) Geben Sie ein Beispiel einer punktweise, aber nicht gleichmäßig beschränkten Familie linearer Operatoren an.

4. Sei X ein Banachraum, $T = I - K$, $K \in L(X,X)$ kompakt. Setze $U_n := \mathrm{Ker}(T^n)$. Zeigen Sie:

a) $\dim U_n < \infty \quad , U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \ldots$

b) Es existiert ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$, so dass $U_n = U_{n+1} = \dots$. (Hinweis: Sie dürfen Lemma 6.1 benutzen: Sei X Banachraum und $T = I - K$ mit $K \in L(X, X)$, und seien $M \subsetneq L$ abgeschlossene Unterräume von X mit $T(L) \subseteq M$. Dann existiert $a \in L \backslash M$ mit $\|a\| = 1$ und $\|Ka - Kx\| \geq 1/2$ für alle $x \in M$.)

5. Wahr oder falsch?

a) Die Norm $\|(x_1, x_2, x_3, x_4)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$ auf $\mathbb{R}^4$ kommt von einem inneren Produkt.

b) Der Raum $C([a, b])$ ist separabel.

c) Die Menge der invertierbaren Operatoren in $L(C([0, 1]), C([0, 1]))$ liegt dicht.

d) Sei X Banachraum. Falls $K \in L(X, X)$ kompakt und $K \neq 0$, gilt $\operatorname{spec} K \neq \{0\}$.

e) Der Operator $A : L^2([0, 1]) \to L^2([0, 1])$, $(Af)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$, $K(x, y) = x^2 - xy + y^2$, ist selbstadjungiert.

6. Sei $A \in L(C([0, 1]), C([0, 1]))$ gegeben durch $(Af)(x) := \int_0^x f(s) ds$. Bestimmen Sie $\operatorname{spec} A$.