Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 13

Functional Analysis

50. (Schwache Konvergenz) Bestimmen Sie, ob und wenn ja gegen welchen Grenzwert die jeweilige Folge schwach konvergiert.

a) $X = \ell^2$, $a^{(j)} = a + e_j$, $a \in \ell^2$, e_j j-ter Einheitsvektor.

b) $X = \ell^2$, $a^{(j)} = je_j$.

c) $X = L^2(\mathbb{R})$, $f^{(j)}(x) = g(x-j)$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger.

d) Wie c), aber $g \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig. (Hinweis: Dichtheitsargument.)

e) $X = L^p((0,1))$, $1 < p < \infty$, $f^{(j)}(x) = j^{1/p}\chi_{[0,1/j]}(x)$. (Hinweis: Betrachten Sie die Integrale $\int_0^1 f^{(j)}(x)g(x)dx$ für $g \in L^q((0,1))$, $1/p + 1/q = 1$, und nehmen Sie zunächst an, dass g kompakten Träger hat.)

f) X Hilbertraum und $\{e_1, e_2, \ldots\}$ orthonormal.

g) $X = L^p((0,2\pi))$, $1 \leq p < \infty$, $f^{(j)}(x) = \sin^2(jx)$.

51. (Vollstetigkeit) Seien X, Y ein Banachräume und $x_n, x \in X$. Zeigen Sie:

a) $T \in L(X,Y)$, $x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$.

b) $T : X \to Y$ kompakt, $x_n \rightharpoonup x \;\Rightarrow Tx_n \to Tx$.

52. (Direkte Methode der Variationsrechnung) Geben Sie einen neuen Beweis des folgenden Resultats aus der Vorlesung: Das Funktional $I(f) := \frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p dx - L(f)$, $1 < p < \infty$, $L \in (L^p(\Omega))^*$ reellwertig, besitzt einen Minimierer. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass Minimalfolgen beschränkt sind, und benutzen Sie schwache Konvergenz.)

53. (Schwacher Abschluss)(**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**) Für eine Teilmenge A eines Banachraums X definiert man den *schwachen Abschluss* $\overline{A}^{\mathrm{w}} := \{x \in X | \text{ es existiert } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \text{ mit } x_n \rightharpoonup x\}$. Gilt stets $\overline{(\overline{A}^{\mathrm{w}})}^{\mathrm{w}} = \overline{A}^{\mathrm{w}}$? (Hinweis: Betrachten Sie die Teilmenge $\{e_i + ie_j | j > i\} \subset \ell^2$.) Gibt es eine Norm auf ℓ^2, so dass schwache Konvergenz äquivalent zu Konvergenz in dieser Norm ist?

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 8.2.10, 15h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung **sowie Lösungsvorschläge zu den vergangenen Blättern** finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.