Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 12

Functional Analysis

46. (Drei Typen von Spektrum) Für einen Banachraum X und $T \in L(X,X)$ definiere

$$\begin{aligned}\sigma_p(T) =& \{\lambda \in \mathbb{C} | T-\lambda \text{ nicht injektiv}\},\\ \sigma_c(T) =& \{\lambda \in \mathbb{C} | T-\lambda \text{ injektiv, nicht surjektiv, } \overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda)} = X\},\\ \sigma_r(T) =& \{\lambda \in \mathbb{C} | T-\lambda \text{ injektiv }, \overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda)} \neq X\}.\end{aligned}$$

Es gilt $\mathrm{spec} T = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$. Man nennt $\sigma_p(T)$ *Punktspektrum*, $\sigma_c(T)$ *stetiges Spektrum* und $\sigma_r(T)$ *Restspektrum* von T.

a) Sei nun $X = L^2([0,1])$ und sei $A \in L(H,H)$ durch $(Af)(x) := x\,f(x)$ gegeben. Bestimmen Sie $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ und $\sigma_r(A)$. (Siehe auch Aufgabe 41.)

b) Mittels $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots)$ werden je ein stetiger linearer Operator in ℓ^2 und in ℓ^∞ erklärt. Bestimmen Sie jeweils Punkt-, kontinuierliches und Restspektrum. (Siehe auch Aufgabe 29.)

47. Finden Sie zu folgenden Operatoren jeweils den adjungierten Operator:

a) Translation um $a \in \mathbb{R}$:

$$T_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (T_a f)(x) = f(x-a),$$

b) Skalierung mit $\lambda > 0$:

$$S_\lambda : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (S_\lambda f)(x) = \sqrt{\lambda} f(\lambda x),$$

c) Multiplikation mit $g \in L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$:

$$M_g : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (M_g f)(x) = g(x) f(x),$$

d) Projektionsoperator $P_U : H \to H$ auf einem abgeschlossenen Unterraum U eines Hilbertraums H.

e) Integraloperator mit Kern $k \in L^2([0,1]\times[0,1];\mathbb{C})$:

$$K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), \quad (Kf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy,$$

48. Beweisen Sie Lemma 5.4: Sei X ein Banachraum und U ein endlichdimensionaler Unterraum. Dann existiert ein abgeschlossenes Komplement $\tilde{U}$ von U. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Mithilfe einer Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ von U seien stetige (!) Funktionale $L_i : U \to \mathbb{K}$, $i = 1,\dots,n$ durch $L_i(e_j) := \delta_{ij}$ erklärt. Zu $x \in U$ definieren Sie $Px := \sum_{i=1}^n L_i(x)e_i$. Setzen Sie die Funktionale L_i und damit die Abbildung P auf ganz X fort und verifizieren Sie: i)$P^2 = P$, ii)$P_{|U} = I$, iii) $U \cap \mathrm{Ker}P = \{0\}$, iv) $U \cup \mathrm{Ker}P = X$, v) $\mathrm{Ker}P$ abgeschlossen.

49. (Über den Dualraum von ℓ^∞)(**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $(\ell^\infty)^* \supsetneq \ell^1$. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

a) Zu $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$ und $y = (y_n)_n \in \ell^1$ definieren wir $f_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \ell^1$ die Abbildung $f_y : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional ist.

b) Es sei c der Raum aller konvergenten Folgen reeller Zahlen, versehen mit der Supremumsnorm. Zeigen Sie, dass mittels

$$f(a) := \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{für } a = (a_n)_n \in c$$

ein stetiges lineares Funktional $f : c \to \mathbb{R}$ erklärt ist.

c) Folgern Sie, dass ein $F \in (\ell^\infty)^*$ existiert, welches nicht von der Form f_y mit $y \in \ell^1$ ist.

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 1.2.10, 15h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung **sowie Lösungsvorschläge zu den vergangenen Blättern** finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.