Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 11

Functional Analysis

42. (Spektrum schiefsymmetrischer und unitärer Operatoren) Sei X ein Hilbertraum und $A \in L(X,X)$. Vervollständigen Sie den Beweis von Proposition 7.2, indem Sie zeigen:

a) Falls A schiefsymmetrisch ist, gilt $\operatorname{spec} A \subset i\mathbb{R}$.

b) Falls A unitär ist, gilt $\operatorname{spec} A \subset S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.

43. Sei X ein Hilbertraum und $A \in L(X,X)$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

b) Wenn A normal ist, so gilt auch $\|A^*A\| = \|A^2\|$.

c) A ist normal $\Leftrightarrow \|Ax\| = \|A^*x\|$ für alle $x \in X$

Hinweis zu c): Beweisen Sie zunächst die *Polarisierungsgleichung* $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$ (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

44. (Polarzerlegung eines kompakten Operators) Sei X ein Hilbertraum und $T \in L(X,X)$ kompakt.

a) Zeigen Sie, dass der Operator T^*T kompakt, selbstadjungiert und positiv ist.

b) Definieren Sie $|T| := (T^*T)^{1/2}$ (siehe Aufgabe 40) und zeigen Sie, dass

$$\||T|x\|^2 = \|Tx\|^2 \quad \forall x \in X$$

gilt und dass somit die Vorschrift $\tilde{U}(|T|x) := Tx$ eine Isometrie von $\operatorname{Ran}|T|$ nach $\operatorname{Ran}T$ definiert, die zu einer Isometrie $U : \overline{\operatorname{Ran}|T|} \to \overline{\operatorname{Ran}T}$ fortgesetzt werden kann. (Ein Operator $A \in L(X,X)$ heisst *Isometrie*, wenn $\|Ax\| = \|x\|$ für alle $x \in X$ gilt.)

c) Bemerken Sie, dass U (als Operator auf dem Hilbertraum $\overline{\operatorname{Ran}|T|}$) unitär ist. Setzen Sie U kanonisch zu einem Element aus $L(X,X)$ fort und zeigen Sie, dass $T = U|T|$ gilt.

45. (Exponentialreihe und Evolutionsgleichung) (**Hausaufgabe - kan zur Korrektur abgegeben werden**) Sei H ein Hilbertraum und $A \in L(H,H)$ selbstadjungiert. Für $z \in \mathbb{C}$ definiere

$$\exp(zA) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} A^n.$$

a) Zeigen Sie, dass die obige Reihe in $L(H,H)$ konvergiert und also einen stetigen linearen Operator definiert.

b) Zeigen Sie, dass $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$ einen positiven selbstadjungierten Operator definiert.

c) Zeigen Sie, dass $\exp(\mathrm{i}tA)$ für $t \in \mathbb{R}$ einen unitären Operator definiert.

d) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in H$ die Abbildung $t \mapsto \exp(\mathrm{i}tA)x$ differenzierbar ist, und dass

$$\frac{d}{dt}(\exp(\mathrm{i}tA)x) = \mathrm{i}A(\exp(\mathrm{i}tA)x)$$

gilt.

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 25.1.10, 15h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung **sowie Lösungsvorschläge zu den vergangenen Blättern** finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.