Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 10

Functional Analysis

37. (Funktionalanalytische Behandlung von RWP gewöhnlicher DGL II)

a) Zeigen Sie, dass der Operator K aus Aufgabe 36 selbstadjungiert und kompakt auf $L^2([0,T])$ ist.

b) Zeigen Sie, dass K dieselben Eigenfunktionen auf $L^2([0,T])$ besitzt wie auf $C([0,T])$.

c) Folgern Sie, dass die (geeignet normierten) Eigenvektoren aus 36 d) eine Orthonormalbasis von $L^2([0,T])$ bilden. Setzen Sie $T = \pi$ und vergleichen Sie diese mit der in der Vorlesung behandelten Fourierbasis.

Hinweis zu a)-c): Wiederholen Sie die Argumente aus der Vorlesung 20 (7.1.10).

38. (Ein Spektralabbildungssatz) Es seien X ein Banachraum, $T \in L(X, X)$ und $p : \mathbb{C} \to C$ ein Polynom.

a) Zeigen Sie
$$\operatorname{spec}\big(p(T)\big) = p\big(\operatorname{spec} T\big)\,.$$
Zur Notation: Sei etwa $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, so ist
$$p(T) := a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n \in L(X, X)\,.$$
Für $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ setzen wir $p(\Omega) := \big\{p(z) : z \in \Omega\big\}$.

b) Zeigen Sie, dass für Projektionen, d.h. Operatoren $P \in L(X, X)$, die $P^2 = P$ erfüllen, $\operatorname{spec} P \subset \{0, 1\}$ gilt.

39. (Konstruktion selbstadjungierter Operatoren) Sei H ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem (d.h. $(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$) und $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Zahlenfolge. Für $x \in H$ setze
$$Tx := \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (x, e_n)\, e_n \quad (*).$$

Zeigen Sie:

a) Die Reihe in $(*)$ ist konvergent in H.

b) $T \in L(H, H)$, und T ist selbstadjungiert.

c) T ist kompakt genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Bestimmmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von T.

40. (**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**)(Quadratwurzel positiver Operatoren) Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ ein kompakter selbstadjungierter Operator, der zusätzlich *positiv* ist, d.h. für den $(Ax, x) \geq 0$ für alle $x \in H$ gilt. Zeigen Sie, dass zu A ein eindeutig bestimmter positiver Operator Q mit $A = Q^2$ existiert.

41. (Approximatives Spektrum)

a) Es seien X ein Banachraum, $A \in L(X, X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in N}$ in X gibt mit $\lim_{n\to\infty} (A - \lambda I)x_n = 0$ und $\|x_n\| = 1$ für alle n, dann gilt $\lambda \in \operatorname{spec} A$.

b) Zeigen Sie: Das Spektrum des Multiplikationsoperators $A : L^1([0,1]) \to L^1([0,1])$, $(Af)(x) = xf(x)$, ist gleich $[0,1]$.

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 18.1.10, 15h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung **sowie Lösungsvorschläge zu den vergangenen Blättern** finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.