Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 9

Functional Analysis

33. (Resolventengleichung) Sei X ein Banachraum und sei $T \in L(X, X)$. Zeigen Sie:

$$(T - \mu)^{-1} - (T - \lambda)^{-1} = (\mu - \lambda)(T - \lambda)^{-1}(T - \mu)^{-1}$$

für alle $\lambda, \mu \notin \operatorname{spec} T$.

34. (Kompakte Diagonalmatrizen auf ℓ^2) Für $t = (t_1, t_2, \dots) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ sei der Operator $T = \operatorname{diag}(t_1, t_2, \dots)$ auf $\ell^2(\mathbb{N})$ durch $(Ta)_i := t_i a_i$, $i \in \mathbb{N}$, erklärt. Zeigen Sie: T ist genau dann kompakt, wenn $\lim\limits_{j\to\infty} t_j = 0$ gilt.

35. (Endlichdimensionale Approximation kompakter Operatoren) Es seien X, Y Banachräume und $K(X, Y) := \{T \in L(X, Y) \mid T \text{ kompakt}\}$. Zeigen Sie:

a) $K(X, Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L(X, Y)$. (Hinweis: Zu $\epsilon > 0$ und $\|T - T_{n_\epsilon}\| \leq \epsilon$ betrachte man eine endliche (!) Überdeckung von $T_{n_\epsilon}(B_1(0))$ durch Kugeln vom Radius ϵ.)

b) Operatoren mit endlichdimensionalem Bild sind kompakt, d.h. $T \in L(X, Y)$, $\dim \operatorname{Ran}(T) < \infty \Rightarrow T \in K(X, Y)$. (Hinweis: Kompaktheit der abgeschlossenen Einheitskugel in endlichdimensionalen normierten Vektorräumen.)

c) Falls Y ein Hilbertraum ist, so gilt:

$$T \in K(X, Y) \Leftrightarrow \text{ Es gibt } T_n \in L(X, Y),\ \dim \operatorname{Ran}(T_n) < \infty,\ \text{so dass } \|T - T_n\| \to 0.$$

(Hinweis: Für die Hinrichtung betrachte man zu $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von $T(B_1(0))$ durch Kugeln vom Radius ϵ und den von deren Mittelpunkten aufgespannten Unterraum des Hilbertraums Y. Für die Rückrichtung benutze man b).)

36. (**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**) (Funktionalanalytische Behandlung von Randwertproblemen gewöhnlicher DGL) Sei

$k : [0,T]^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$k(x,s) := \begin{cases} \frac{s(x-T)}{T}, & x \geq s \\ \frac{x(s-T)}{T}, & x \leq s \end{cases}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie: Für $y \in C^2([0,T])$, $f \in C([0,T])$ ist das Randwertproblem $y'' = f$, $y(0) = y(T) = 0$ äquivalent zur Integralgleichung $y(x) = \int_0^T k(x,s)f(s)ds$.

b) Betrachten Sie $C_0^2([0,T]) := \{y \in C^2([0,1]) \mid y(0) = y(T) = 0\}$ und die beiden Operatoren $L : C_0^2([0,T]) \to C([0,T])$, $K : C([0,T]) \to C_0^2([0,T])$, gegeben durch $Ly = y''$ bzw. $(Kf)(t) = \int_0^T k(t,s)f(s)ds$. Zeigen Sie: Der Integraloperator K ist genau die Inverse L^{-1} des Differentialoperators L.

c) Zeigen Sie: Die Lösungen $y \in C_0^2([0,T])$ der Gleichung $Ly = \lambda y$, $\lambda \neq 0$, sind genau die Eigenvektoren von K zum Eigenwert $\mu = 1/\lambda$.

d) Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\mu \neq 0$ von K sowie alle zugehörigen Eigenvektoren.

e) Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der Theorie aus Paragraph 6.

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 21.12.09, 15h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung **sowie Lösungsvorschläge zu den vergangenen Blättern** finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.