

Functional Analysis

- 29.** (Spektrum des Linksshifts) Sei $X = \ell^2(\mathbb{N})$ und $S_- : X \rightarrow X$ der Linksshiftoperator. Berechnen Sie $\text{spec } S_-$. Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $|\lambda| < 1$, $|\lambda| = 1$, $|\lambda| > 1$. Geben Sie zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$ einen expliziten Eigenvektor von S_- an, und behandeln sie die beiden anderen Fälle durch Verwendung geeigneter Sätze aus der Vorlesung.
- 30.** (**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**) Es sei X ein Banachraum.
- a) Weiter seien $A, B \in L(X, X)$. Zeigen Sie, dass $I - AB$ genau dann invertierbar ist, wenn auch $I - BA$ invertierbar ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass $(I - AB)^{-1} =: C$ existiert und betrachten Sie $I + BCA$.
- b) Folgern Sie: Für $S, T \in L(X, X)$ gilt
- $$\text{spec}(ST) \setminus \{0\} = \text{spec}(TS) \setminus \{0\}.$$
- c) Finden Sie ein Beispiel für $S, T \in L(X, X)$ derart, dass $0 \in \text{spec}(ST)$ und $0 \notin \text{spec}(TS)$ gilt.
- 31.** Sei X ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie, dass der Quotientenraum X/U ein Banachraum ist. Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $T : X/U \rightarrow U^\perp$, die jeder Äquivalenzklasse mit Repräsentant $x \in X$ das Element $P^\perp x = u^\perp$ aus der nach dem Projektionssatz eindeutigen Zerlegung $x = u + u^\perp$ zuordnet. Zeigen Sie, dass diese Abbildung wohldefiniert, linear und bijektiv ist, und dass $\|[x]\|_{X/U} = \|P^\perp x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt.
- 32.** Es seien $X_1 = C^1([0, 1])$ und $X_2 = \{f \in C^1([0, 1]), f(0) = f(1)\}$, beide versehen mit der Norm $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, und es sei $Y = C([0, 1])$. Berechnen sie den Index des Ableitungsoperators $Tf := f'$ als Operator zwischen X_1 und Y bzw. zwischen X_2 und Y .

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 14.12.09, 15h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung **sowie Lösungsvorschläge zu den vergangenen Blättern** finden Sie auf www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09.