Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 7

Functional Analysis

25. (Anwendung des Baireschen Kategoriensatzes)

a) Es seien X ein normierter Raum und $U \subsetneqq X$ ein linearer Unterraum. Zeigen Sie, dass U keine offene Kugel enthält.

b) Benutzen Sie den Satz von Baire, um zu zeigen, dass es keine Norm im Raum $\mathbb{C}[z]$ der Polynome auf $\mathbb{C}$ gibt, welche diesen zu einem Banachraum macht. (Hinweis: Betrachten Sie die Unterräume U_n der Polynome vom Grad $n \in \mathbb{N}$.)

26. (**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**)(Punktweise Konvergenz in $L(X, Y)$) Seien X und Y Banachräume und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X, Y)$, so dass $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ für alle $x \in X$ existiert.

a) Zeigen Sie: $T \in L(X, Y)$ und $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| < \infty$. Vergleichen Sie die Aussage mit Aufgabe 23 b).

b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im allgemeinen nicht in der Operatornorm gegen T konvergiert.

27. (Satz vom abgeschlossenen Graphen) Ein linearer Operator $A : X \to Y$ zwischen normierten Vektorräumen X und Y heisst *abgeschlossen*, falls sein *Graph* $\mathrm{Gr}(A) = \{(x, Ax)\} \subset X \times Y$ ein abgeschlossener Unterraum des Produktraumes $X \times Y$ ist. Zeigen Sie: Ein abgeschlossener linearer Operator zwischen zwei Banachräumen X und Y ist stetig. (Hinweis: Bemerken Sie, dass in diesem Fall $\mathrm{Gr}(A)$ selbst wieder ein Banachraum ist und betrachten Sie die Abbildung $\pi_1 : \mathrm{Gr}(A) \to X$, $\pi_1(x, Ax) := x$.)

28. (Neumannsche Reihe und bijektive stetige lineare Operatoren)

a) Es seien X ein Banachraum und $A : X \to X$ ein stetiger linearer Operator mit $\|A\| < 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$B_n := \sum_{k=0}^{n} A^k .$$

Zeigen Sie, dass ein $B \in L(X,X)$ existiert mit $B_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$ und

$$B(I-A) = (I-A)B = I,$$

d.h. $B = (I-A)^{-1}$.

b) Es seien nun Y ein weiterer Banachraum und $T \in L(X,Y)$ bijektiv. Zeigen Sie: Für alle $S \in L(X,Y)$ mit $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ ist $T - S$ bijektiv. (Hinweis: Benutzen Sie $T - S = T(I - T^{-1}S)$ und Aufgabe 24.)

c) (i) Geben Sie einen neuen Beweis für die Tatsache, dass die Menge

$$M := \{T \in L(X,Y) : T \text{ bijektiv}\}$$

offen in $L(X,Y)$ ist.

(ii) Folgern Sie: Aus $A \in L(X,X)$, $\lambda_0 \notin \operatorname{spec} A$ folgt $\lambda \notin \operatorname{spec} A$ für alle $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(A-\lambda_0 I)^{-1}\|}$, insbesondere ist $\operatorname{spec} A$ abgeschlossen.

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 7.12.09, 15h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung **sowie Lösungsvorschläge zu den vergangenen Blättern** finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.