Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 6

Functional Analysis

21. (**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**) (Operatornorm für Matrizen) Eine lineare Abbildung $A : X \to Y$, $X = \mathbb{K}^m$, $Y = \mathbb{K}^n$ werde als $(n \times m)$-Matrix (a_{ij}) dargestellt.

a) Zeigen Sie: tragen $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ die Summennorm $\|(t_i)\|_1 = \sum_i |t_i|$, so ist $\|A\|_{L(X,Y)} = \max\limits_{j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (Spaltensummennorm).

b) Zeigen Sie: tragen $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ die Maximumsnorm $\|(t_i)\|_\infty = \max\limits_i |t_i|$, so ist $\|A\|_{L(X,Y)} = \max\limits_{i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ (Zeilensummennorm).

22. (Raum der stetigen Operatoren) Sei X ein normierter Vektorraum und sei Y ein Banachraum. Zeigen, Sie dass dann auch $L(X, Y)$ ein Banachraum ist.

23. (Stetige Fortsetzung und Limes linearer Operatoren) Sei X ein normierter Vektorraum, $D \subset X$ ein dichter Unterraum und Y ein Banachraum.

a) Sei $T \in L(D, Y)$. Zeigen Sie: Es gibt genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{T}$ von T auf X , d.h. $\tilde{T} \in L(X, Y)$ mit $\tilde{T}x = Tx$ für alle $x \in D$.

b) Es seien $T_n \in L(X, Y)$ und es gelte $\|T_n\| \leq C < \infty$ für alle n. Zeigen Sie: Falls $\underset{n\to\infty}{lim} T_n x$ für alle $x \in D$ existiert, so existiert $Tx := \underset{n\to\infty}{lim} T_n x$ für alle $x \in X$ und es ist $T \in L(X, Y)$.

24. (Submultiplikativität der Norm) Seien X, Y, Z normierte Vektorräume, $A \in L(Y, Z)$, $B \in L(X, Y)$. Dann gilt $AB \in L(X, Z)$ mit $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. (Hierbei ist $(AB)x := A(Bx)$ für alle $x \in X$ definiert.)

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 30.11.09, 15h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung **sowie Lösungsvorschläge zu den vergangenen Blättern** finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.