Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 5

Functional Analysis

17. (**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**) Betrachten Sie den Operator $A : (d, \|\cdot\|_\infty) \to (d, \|\cdot\|_\infty)$, gegeben durch die Matrix $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots)$ d.h. $(Ab)_n = a_n b_n$, wobei $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in d$ und $a_n \in \mathbb{K}$ gilt. Zeigen Sie:

$$A \text{ stetig } \Leftrightarrow \sup_n |a_n| < \infty.$$

18. (Rieszscher Darstellungssatz, reeller Fall) Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ und $l \in L(X,\mathbb{R}) = X^*$ ein stetiges lineares Funktional auf X. Zeigen Sie: Dann existiert genau ein $v \in X$ derart, dass

$$l(x) = \langle x, v\rangle \quad \forall x \in X.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Minimalproblem

$$\text{Minimiere } F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - l(x).$$

und eine Minimalfolge, d.h. $v_n \in X$ mit $F(v_n) \to \inf_{x\in X} F(x)$. Zeigen Sie die Gleichung

$$F\left(\frac{v_m + v_n}{2}\right) + \frac{1}{2}\left\|\frac{v_m - v_n}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(F(v_m) + F(v_n))$$

und gehen Sie dann analog zum Beweis des Projektionssatzes vor.

19. (Integraloperator mit stetigem Kern) Sei $1 < p < \infty$ und $k \in C([0,1]\times[0,1])$. Zeigen: Der Integraloperator

$$T_k f(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)dt$$

ist ein stetiger Operator von $L^p([0,1])$ in sich, für dessen Norm

$$\|T_k\| \le \sup_s \Big(\int_0^1 |k(s,t)|dt\Big)^{1/q} \sup_t \Big(\int_0^1 |k(s,t)|ds\Big)^{1/p}$$

gilt, wobei $1/p + 1/q = 1$ ist.

20. (Translationsoperatoren) Es seien $s \in \mathbb{R}$ und $1 \le p \le \infty$. Zeigen Sie:

a) Durch $(T_s f)(t) := f(t-s)$ wird eine lineare Isometrie $L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ definiert, d.h. ein linearer Operator, für den $\|T_s f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R})$ gilt.

b) Es gilt $\lim\limits_{s\to 0} \|T_s f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R}) \iff p < \infty$.

Sie dürfen hierzu benutzen, dass der Raum C_c der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, welche außerhalb einer kompakten Menge verschwinden, dicht in L^p liegt.

c) Für $s \to 0$ konvergiert $\|T_s - \mathrm{id}\|_{L(L^p(\mathbb{R}))}$ nicht gegen 0.

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 23.11.09, 15h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung **sowie Lösungsvorschläge zu den vergangenen Blättern** finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.