Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 4

Functional Analysis

13. (Äquivalente Normen auf $L^2([-\pi,\pi])$) Sei $f \in \tilde{L}^2([-\pi,\pi])$. Definiere die *Fourierkoeffizienten*

$$f_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, f(x)dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aus der Fourieranalysis ist bekannt, dass

$$\|[f]\|_* := \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2\Big)^{1/2}$$

eine äquivalente Norm auf $L^2([-\pi,\pi])$ definiert, genauer gilt:

a) $\|[f]\|_* = (2\pi)^{-1/2}\|[f]\|_2$ für alle $[f] \in L^2([-\pi,\pi])$ (Satz von Plancherel),

b) $\|[f] - S_{N,f}\|_2 \underset{N\to\infty}{\to} 0$, wobei $S_{N,f} = \sum_{|k|\le N} f_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ ist.

c) Für alle $(a_k) \in l^2(\mathbb{Z})$ existiert $[\tilde{f}] \in L^2([-\pi,\pi])$, so dass $\|[\tilde{f}] - (\sum_{|k|\le N} a_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx})\|_2 \to 0$ für $N \to \infty$ gilt.

Folgern Sie, dass $(L^2([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2)$ vollständig ist.

14. (**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**) (Gewichtetes inneres Produkt) Sei Y der Vektorraum $C([0,1])$. Zu $w \in Y$ betrachten Sie die durch

$$\langle f, g\rangle_w := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}w(t)dt$$

erklärte Abbildung $X \times X \to \mathbb{C}$.

a) Für welche w ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ ein inneres Produkt?

b) Welche zusätzlichen Eigenschaften muss w haben, damit die durch das innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ definierte Norm $\|\cdot\|_w$ äquivalent zu der durch das gewöhnliche innere Produkt (d.h. $w \equiv 1$) definierten Norm ist?

15. (Stetig oder nicht?) Es sei $\mathbb{C}[z]$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{C}$ in einer Variablen. Zu

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$$

wird mittels $\|p\| := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ eine Norm auf $\mathbb{C}[z]$ erklärt.

a) Welche der folgenden linearen Funktionale $f_j : \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}$ sind stetig ?

$$f_1(p) := \int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t \ , \qquad f_2(p) := p'(0) \ , \qquad f_3(p) := p'(1) \ .$$

b) Welche der folgenden linearen Operatoren $T_j : \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ sind stetig ?

$$(T_1 p)(z) := p(z+1) \ , \qquad (T_2 p)(z) := \int_0^z p(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \ .$$

16. (Differentialgleichungen via lineare Operatoren) Es seien a_0 und a_1 stetige Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Finden Sie einen normierten Vektorraum Y derart, dass die Abbildung $A : Y \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, definiert durch

$$(Ay)(x) = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x),$$

stetig ist.

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 16.11.09, 15h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung **sowie Lösungsvorschläge zu den vergangenen Blättern** finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.