Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 3

Functional Analysis

9. (**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**)(Randbedingungen). Sei $C_0([a, b])$ die Menge der stetigen Funktionen f von $[a, b]$ nach $\mathbb{K}$, für die zusätzlich $f(a) = f(b) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $(C_0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist. (Hinweis: Kann man diesen Raum als Unterraum eines bekannten Banachraums auffassen?)

10. (Separabel oder nicht?) Ein normierter Raum Y heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare Menge gibt, die dicht in Y liegt.

a) Zeigen Sie, dass $(d, \|\cdot\|_p)$ separabel ist $(1 \leq p \leq \infty)$.

b) Folgern Sie, dass ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ und $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ separabel sind.

c) Ist ℓ^∞ separabel?

11. (Definition einer Orthonormalbasis) Sei $\{e_n\} \subset \mathcal{H}$, $n \in I \subseteq \mathbb{N}$ ein (endliches oder abzählbares) Orthonormalsystem, d.h. es gelte $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}$ für alle $n, m \in I$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) $\overline{\mathrm{Span}(\{e_n\})} = \mathcal{H}$,

b) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $x = \lim\limits_{N \to \infty} \sum_{n \in I, n \leq N} \langle x, e_n \rangle e_n$,

c) $\mathrm{Span}(\{e_n\})^\perp = \{0\}$.

Falls $\{e_n\}$ eine (und damit alle) dieser Bedingungen erfüllt, heißt $\{e_n\}$ *Orthonormalbasis von* $\mathcal{H}$.

12. (Hilbertraum oder nicht?)

a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Es gilt $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ für ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (d.h. X ist ein Hilbertraum) genau dann, wenn die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

gilt. Hinweis: Betrachten Sie die Bilinearform

$$B(x,y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2\right).$$

b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $p \neq 2$. Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega)$ kein Hilbertraum ist.

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 9.11.09, 12h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.