Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 2

Functional Analysis

4. (Definition abgeschlossener Mengen) Sei Y ein normierter Vektorraum und $A \subset X$. Zeigen Sie, dass die beiden Bedingungen

a) $x_n \to x$, $x_n \in A \;\Rightarrow x \in A$ und

b) $Y \setminus A$ ist offen

an die Menge A äquivalent sind.

5. Sei Y ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ folgt $x_n + y_n \to x + y$.

b) Aus $\lambda_n \to \lambda$ (in $\mathbb{K}$) und $x_n \to x$ folgt $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

c) Aus $x_n \to x$ folgt $\|x_n\| \to \|x\|$.

d) Sei $U \subset Y$ ein Unterraum. Zeigen sie, dass der Abschluss $\overline{U}$ von U ebenfalls ein Untervektorraum ist.

6. a) Welche der Unterräume d, c_0 und c von ℓ^∞ sind abgeschlossen (und damit vollständig)?

b) Zeigen Sie, dass d dicht in ℓ^p liegt ($1 \leq p < \infty$), nicht jedoch in ℓ^∞.

7. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Der Unterraum $P([a,b])$ der Polynome auf $[a,b]$ liegt dicht in $C([a,b])$.

8. (**Hausaufgabe - kann zur Korrektur abgegeben werden**)

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $1 \leq p \leq q < \infty$. Dann gilt $L^q[a,b] \subset L^p[a,b]$, genauer gilt für $f \in L^q[a,b]$

$$\frac{\|f\|_p}{(b-a)^{1/p}} \leq \frac{\|f\|_q}{(b-a)^{1/q}}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Höldersche Ungleichung.

b) Für ein unbeschränktes Intervall I und $1 \leq p \neq q < \infty$ gilt weder $L^p(I) \subset L^q(I)$ noch $L^q(I) \subset L^p(I)$.

Die Hausaufgabe können Sie - alleine oder in Zweiergruppen - **bis zum 2.11.09, 12h** in 03.08.051 (Ordner "Funktionalanalysis") zur Korrektur abgeben.
Aktuelle Information zur Vorlesung finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.