Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Gero Friesecke
Mario Koppen

Wintersemester 2009/10

Übungsblatt 1

Functional Analysis

1. Welche Inklusionsbeziehungen gelten zwischen den in der Vorlesung behandelten Räumen d, c_0, c, ℓ^∞, ℓ^p, ℓ^q (mit $1 \leq p < q < \infty$)? Handelt es sich um echte Inklusionen?

2. a) Für $a \in \ell^p$, $b \in \ell^q$ und $c \in \ell^r$ mit $1/p + 1/q + 1/r = 1$ sei abc durch $(abc)_n := a_n b_n c_n$ definiert. Zeigen Sie, dass $abc \in \ell^1$ und

$$\|abc\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q \|c\|_r$$

gilt. (Hinweis: Benutzen Sie die Höldersche Ungleichung zweimal.)

b) Sei $a \in \ell^1$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{p \to \infty} \|a\|_p = \|a\|_\infty$ gilt. (Hinweis: Für $a \neq 0$ gilt $a = (\sup |a_n|)(a/\sup |a_n|)$. Betrachten Sie $\log(\|a\|_p)$.)

3. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $Y = C^b(\Omega)$ der Raum der beschränkten stetigen Funktionen von Ω nach $\mathbb{K}$, versehen mit der Supremumsnorm. Zeigen Sie, dass Y ein Banachraum ist. (Hinweis: Lässt sich Y als Unterraum eines bekannten Banachraums auffassen?)

Aktuelle Information zur Vorlesung finden Sie auf `www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FA09`.