Musterlösung Probeklausur

1a)

a) Banach

b) — " —

c) — " —

d) kein Banach (nicht einmal Vektorraum)

e) kein Banach (siehe VL)

f) kein Banach (— " —)

b)

- $\ell^p \subset \ell^q$ $1 \le p \le q \le \infty$ (siehe VL)
- $\ell^p \subset (\{a = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \mid \lim a_j \text{ existiert}\}, \|\cdot\|_\infty)$
  $1 \le p < \infty$ (Summanden konvergenter Reihen müssen Nullfolgen sein
- (Menge in (d)) $\subset$ (Menge in c)) $\subset \ell^\infty$
- $(C^1([-1,1]), \|\cdot\|_\infty) \subset (C([-1,1]), \|\cdot\|_1)$
  (wegen $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt \le 2\|f\|_\infty$)
-

2) Siehe Vorlesung / Übungen

3) ——— " ———

4) Siehe Beweis des Spektralsatzes für kompakte Operatoren

5a) Falsch (Parallelogrammgleichung verletzt, teste mit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,0,1,0)$
$y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (0,1,0,1)$)

b) Richtig ~~(Polynome mit rationalen~~ (siehe Übungen)

c) Falsch (Es existiert Fredholmoperator vom Index 1)

d) Falsch (siehe Gegenbeispiel $\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & & \\ & & \frac{1}{3} & 0 & \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ aus V2)

e) Richtig ($K(x,y)$ symmetrisch, d.h. $K(y,x) = K(x,y)$)

6) $X = C([0,1])$, $(Af)(x) := \int_0^x f(s)\,ds$

~~X kompakt~~ A ist kompakt, da

Ran $A \subset C^1([0,1])$ und $C^1([0,1])$ kompakt

in $C([0,1])$ einbettet (siehe VL)

Spektralsatz: $\operatorname{spec} A = \begin{cases} \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}, & \lim \lambda_j = 0 \\ \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} & , \end{cases}$

alle $\lambda_i \neq 0$ Eigenwerte

$\dim X = \infty \Rightarrow 0 \in \operatorname{spec} A$

Hat ~~Eigenwerte~~ A Eigenwerte $\neq 0$?

Angenommen, $Af = \lambda f$ für $\lambda \neq 0$, $f \neq 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(s)\,ds = \lambda f(x)$$

$\Rightarrow f$ ~~diff~~ stetig diffbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha \cdot e^{\frac{1}{\lambda}x} \qquad (f \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0)$$

Aber dann: $f(0) = \alpha \neq 0$, im Widerspruch

zu $f(0) = \frac{1}{\lambda} (Af)(0) = \frac{1}{\lambda} \int_0^0 f(s)\,ds = 0$

$\Rightarrow$ λ ist kein Eigenwert von A, falls $\lambda \neq 0$

<u>Insgesamt:</u> $\operatorname{spec} A = \{0\}$