Lösungen Blatt 7

**27** a) Da $X$ separabel ist, gibt es eine abzählbare Menge $V = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, die dicht in $X$ liegt. Zu jedem $n$ gibt es nach Korollar 3.3.2 aus der Vorlesung ein $f_n \in X^*$ mit $\|f_n\|_{X^*} = 1$ und $f_n(x_n) = \|x_n\|_X$.

Für $x \in X$ setzen wir $Tx := \big(f_n(x)\big)_n$. Wegen $|f_n(x)| \le \|f_n\|_{X^*}\|x\|_X = \|x\|_X$ gilt $\|Tx\|_\infty \le \|x\|_X$. Damit ist $T : X \to \ell^\infty$ ein stetiger linearer (die Linearität sieht man sofort ein) Operator.

Wir zeigen nun, dass $T$ isometrisch ist. Da $V$ dicht in $X$ liegt, gibt es zu jedem $x \in X$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x_m\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \le \|x\|_X - |f_m(x)| \le \big|\|x\|_X - f_m(x)\big| &= \big|\|x\|_X - \|x_m\|_X - f_m(x - x_m)\big| \\ &\le \big|\|x\|_X - \|x_m\|_X\big| + |f_m(x - x_m)| \\ &\le \|x - x_m\|_X + \|f_m\|_{X^*}\|x - x_m\|_X < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\|Tx\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| = \|x\|_X$.

b) Es bleibt zu zeigen, dass die Bildmenge $T(X)$ abgeschlossen in $\ell^\infty$ ist.

Dazu sei $(y_n)_n$ eine Cauchyfolge in $T(X) \subseteq \ell^\infty$. Da $\ell^\infty$ ein Banachraum ist, existiert $y := \lim_{n\to\infty} y_n \in \ell^\infty$. Wir müssen noch nachweisen, dass $y \in T(X)$ gilt.

Wir wissen, dass $T^{-1} : T(X) \to X$ ebenfalls eine Isometrie ist; deshalb ist auch $(z_n)_n$, definiert durch $z_n := T^{-1}y_n$, eine Cauchyfolge in $X$. Weiter ist $X$ ein Banachraum; folglich existiert $z := \lim_{n\to\infty} z_n$. Damit ist

$$\|Tz - y\|_\infty \le \|Tz - Tz_n\|_\infty + \|Tz_n - y\|_\infty = \|z - z_n\|_X + \|y_n - y\|_\infty \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Also gilt $Tz = y$ und somit $y \in T(X)$ wie behauptet.

25) ~~28~~ a) Angenommen, $U$ enthält eine offene Kugel. Dann gibt es $x_0 \in U$ und $\varepsilon > 0$ derart, dass $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\| < \epsilon\} \subset U$ gilt. Wir wählen nun $y \in X \setminus U$. Da $U$ ein Vektorraum ist, gilt dann auch $v := x_0 + \frac{\varepsilon}{2\|y\|} \cdot y \notin U$ im Widerspruch zu $v \in U_\varepsilon(x_0) \subset U$.

b) Wir betrachten die Unterräume $U_n := \{p \in \mathbb{C}[z] : \deg(p) \le n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$\mathbb{C}[z] = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\,.$$

Angenommen, es existiert eine Norm $\|\cdot\|$ derart, dass $\big(\mathbb{C}[z], \|\cdot\|\big)$ ein Banachraum ist. Nach Korollar ~~2.2.10~~ 1.3 ist jeder endlich-dimensionale Unterraum eines normierten Raumes abgeschlossen. Folglich ist jedes $U_n$ abgeschlossen in $\big(\mathbb{C}[z], \|\cdot\|\big)$. Nun folgt aus ~~Korollar 4.1.4~~, dass mindestens einer der Räume $U_n$ ein nicht-leeres Inneres hat und somit eine offene Kugel enthält – im Widerspruch zu a).

Lemma 4.1
(Baire)

26)

a) Für jedes $x \in X$ ist $\left(\|T_n x\|_Y\right)_{n\in\mathbb{N}}$ als konvergente Folge beschränkt.

Banach-Steinhaus $\Rightarrow$ $\left(\|T_n\|_{L(X,Y)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

Es gilt
$$\|Tx\|_Y = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|T_n x\|}_{\leq \|T_n\| \, \|x\|} \leq \left(\liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\right)\|x\|$$

$$\Rightarrow \|T\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|\neq 0}\left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \quad (\ast)$$

b) Betrachte $X = Y = \ell^2(\mathbb{N})$, $T_n : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$

$$(T_n x)_i := \begin{cases} x_i, & i \leq n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

Es gilt $\underbrace{\|x - T_n x\|_{\ell^2}}_{= \|(I - T_n)x\|_{\ell^2}} = \left(\sum_{i > n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (Schwanzsumme einer konvergenten Reihe),

d.h. punktweiser Limes existiert und ist gleich der Identität $I$

aber $\| e_{n+1} - T_n e_{n+1} \|_{\ell^2} = \| e_{n+1} \| = 1$,

also $\| I - T_n \| \geq 1$, insbesondere nicht konvergent

$$\Big( e_n = (0, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{1}, 0, \ldots) \Big)$$

---

(*) Vergleiche Aufgabe 23b), wo wir gleichmäßige Beschränktheit $\| T_n \| \leq C$ ($C$ unabhängig von $n$) voraussetzen mussten.

(2Z)

Da $A$ abgeschlossen ist, ist

$Gr(A) \subset X \times Y$ als abgeschl. UVR wieder Banach.

- $\pi_1 : Gr(A) \longrightarrow X$, $(x, Ax) \longmapsto x$ ist injektiv [[ $x = 0 \Rightarrow Ax = 0$, $\Rightarrow (x, Ax) = (0, 0)$ ]]

stetig ( $\|\pi_1(x, Ax)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Ax\|_Y = \|(x, Ax)\|_{X \times Y}$

(nach Def. der Norm im Produktraum)
( $Gr(A)$ erbt diese von $X \times Y$ ) )

~~und~~ linear (klar) und surjektiv (klar).

- Satz vom stetigen Inversen: $\pi_1^{-1} : X \to Gr(A)$ linear & stetig.

Die Abb. $\pi_2 : G(A) \longrightarrow \cancel{Ran}\ Ran(A) \subset Y$

$$(x, Ax) \longmapsto Ax$$

ist linear (klar), stetig ( $\|\pi_2(x, Ax)\|_Y$

$$= \|Ax\|_Y \le \|Ax\|_Y + \|x\|_X$$
$$= \|(x, Ax)\|_{X \times Y}$$

(und surjektiv nach ~~auf~~ Ran(A) (Def. des Bildes)) )

Da aber $T$ darstellbar ist als

$$T = \pi_2 \circ (\pi_1)^{-1} \quad \left( (\pi_2 \circ (\pi_1)^{-1}) x = \pi_2(x, Ax) = Ax \right),$$

ist also $T$ als Verkettung zweier stetiger Operatoren selbst wieder stetig.

34 a) Es sei $(f_n)_n$ eine konvergente Folge in $C^1([0,1])$ derart, dass die Bildfolge $(Df_n)_n$ konvergent in $C([0,1])$ ist, etwa $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ und $\|f_n' - g\|_\infty \to 0$ mit $f \in C^1([0,1])$ und $g \in C([0,1])$. Wir müssen zeigen, dass $g = Df$ ist. Dazu benützen wir einen wohlbekannten Satz, der in jedem Analysis-Lehrbuch zu finden ist: *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_n : I \to \mathbb{C}$ eine punktweise konvergente Folge differenzierbarer Funktionen. Wenn die Folge $(f_n')_n$ gleichmäßig auf $I$ konvergiert, dann ist $f : I \to \mathbb{C}$, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, differenzierbar und es gilt $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.*

In unserer Situation gilt also $g = f'$ und damit ist $D$ abgeschlossen wie behauptet.

b) Wir wissen bereits, dass $\left(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$ ein Banachraum ist. Angenommen, $\left(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$ ist ebenfalls ein Banachraum. Dann folgt mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, dass $D$ stetig ist. Dies ist aber nicht der Fall, wie wir in Aufgabe 18 gesehen haben. Also kann $\left(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$ kein Banachraum sein.

38)

35 a) Mit Submultiplikativität der Operatornorm und der Dreiecksungleichung erhalten wir

• B(X,Y) heißt bei uns L(X,Y)!

• id heißt I

$$\|B_n - B_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} A^k \right\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|A\|^k \qquad \text{für } m,n \in \mathbb{N},\ m < n\,.$$

Wegen $\|A\| < 1$ (geometrische Reihe !) ist $(B_n)_n$ eine Cauchyfolge in $B(X)$. Da $X$ ein Banachraum ist, ist auch $B(X)$ mit der Operatornorm ein Banachraum (~~Satz 3.1.5~~) (Satz 3.1); deshalb gibt es $B \in B(X)$ mit $B_n \to B$. Weiter ist

$$(\mathrm{id}_X - A)B_n = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} = \mathrm{id}_X - A^{n+1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und wegen $\|A^n\| \le \|A\|^n \to 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ in $B(X)$.

Insgesamt haben wir $(\mathrm{id}_X - A)B = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{id}_X - A)B_n = \mathrm{id}_X - \lim_{n\to\infty} A^{n+1} = \mathrm{id}_X$ ;

ebenso zeigt man $B(\mathrm{id}_X - A) = \mathrm{id}_X$. Folglich ist $B = (\mathrm{id}_X - A)^{-1}$.

Satz 4.1

b) Laut ~~Korollar 4.2.4~~ ist $T^{-1} : Y \to X$ stetig. Für $S \in B(X,Y)$ mit $\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ gilt $T^{-1}S \in B(X)$ und $\|T^{-1}S\| \le \|T^{-1}\| \cdot \|S\| < 1$.

Weiter ist $T - S = T - TT^{-1}S = T(\mathrm{id}_X - T^{-1}S)$. Nach a) ist $(\mathrm{id}_X - T^{-1}S)$ eine bijektive Abbildung $X \to X$; nach Voraussetzung ist $T : X \to Y$ bijektiv. Folglich ist auch $T - S : X \to Y$ bijektiv.

c) Es sei $T \in M$, also $T : X \to Y$ bijektiv. Wir betrachten die in $B(X,Y)$ offene Kugel um $T$ mit Radius $\frac{1}{\|T^{-1}\|}$, $U_T := \left\{ R \in B(X,Y) : \|T - R\| \le \frac{1}{\|T^{-1}\|} \right\}$.

Sei nun $R \in U_T$ beliebig und $S := T - R$. Dann gilt nach b), dass $R = T - S$ bijektiv ist. Mit anderen Worten $U_T \subseteq M$.

Also liegt jedes Element von $M$ in einer offenen Kugel, welche selbst ganz zu $M$ gehört, d.h. $M$ ist offen.

27 c) ii)

$$A \in L(X,X), \quad \lambda_0 \notin \operatorname{spec} A$$

$$\Rightarrow (A-\lambda_0 I)^{-1} \in L(X,X)$$

Bel. $\cancel{(A-\lambda) \notin}$ $\lambda \notin \operatorname{spec} A$,

d.h. $(A-\lambda)^{-1} \in L(X,X)$ für alle $\lambda$ $|\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|(A-\lambda_0)^{-1}\|}$

Beweis:

~~müssen nur ...~~ Nach dem Bisherigen bleibt nur zu zeigen, dass $(A-\lambda)$ in der Kugel vom Radius $\frac{1}{\|(A-\lambda_0)^{-1}\|}$ um $A-\lambda$ liegt. Dies ist

wegen
$$\|(A-\lambda I)-(A-\lambda_0 I)\| = \|(\lambda-\lambda_0)I\| = |\lambda-\lambda_0| \underbrace{\|I\|}_{=1} = |\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|(A-\lambda_0)^{-1}\|} \quad \text{(n. Vorauss.)}$$

aber gegeben.