21a)

Lösungsvorschlag Blatt 6

$$\|Ax\| = \sum_i |Ax|_i$$

$$= \sum_{i,j} |a_{ij} x_j|$$

$$\leq \sum_{i,j} |a_{ij}| \, |x_j|$$

$$= \sum_j |x_j| \sum_i |a_{ij}|$$

$$\overset{(*)}{\leq} \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right) \cdot \sum_j |x_j| \quad \text{, also } \|A\|_{L(X,Y)} \leq \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right)$$

Für $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei die 1 an dem Index j_0 steht, für den $\sum_i |a_{ij_0}| = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right)$ ~~gilt~~ ist, gilt Gleichheit in $(*)$, und also $\|A\|_{L(X,Y)} = \max_j \left(\sum_i |a_{ij}| \right)$

$(\|x\| = 1)$

21b)

~~$\|A\|_{L(X,Y)}$~~ ~~$\|Ax\|_{L(\ldots)}$~~

$$\|Ax\| = \max_i \left(|Ax|_i \right)$$

$$= \max_i \left(\left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \right)$$

$$\leq \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \, |x_j| \right) \leq \max_i \left(\max_j (|x_j|) \sum_j |a_{ij}| \right)$$

$$\max_i \left(\left| \sum_j a_{ij} \cdot \underbrace{e^{-i\varphi_j}}_{|\,|=1} \right| \right)$$

$$\leq \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right)$$

$$\overset{\text{Def.}}{\underset{\text{von } i_0}{=}} \sum_j |a_{i_0 j}| = \left| \sum_j |a_{i_0 j}| \right|$$

$$\overset{\text{Wahl}}{\underset{\text{der } \varphi_j}{=}} \left| \sum_j a_{i_0 j} \cdot e^{-i\varphi_j} \right|,$$ ~~also folgt und~~ realisiert i_0 dieses Max., d.h. es gilt

$$\max_i \left(\left| \sum_j a_{ij}\, e^{-i\varphi_j} \right| \right) = \left| \sum_j a_{i_0 j}\, e^{-i\varphi_j} \right|$$

und somit $\|A x_0\| = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right) \cdot \underbrace{\|x_0\|}_{=1}$ nach Konstruktion,

also insgesamt $\|A\|_{L(X,Y)} = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}| \right)$

$\boxtimes$

22) Werner, Satz II.1.4

24) Werner, Lemma II.1.6 (inkl. Beispiel für "<" im Allgemeinen

23)

a) Für $x \in X$ wähle $(x_n) \subset D$ mit

$x_n \to x$ (möglich, da D dicht ist)

und definiere $\tilde{T}x := \lim_{n\to\infty} Tx_n$

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \underset{T \in L(D,Y)}{\leq} M \underbrace{\|x_n - x_m\|}_{\xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0}$$, also Tx_n Cauchy

und $\tilde{T}x$ existiert, da Y Banach.

· Linearität klar wegen Rechenregeln für Grenzwerte

$$\|\tilde{T}x\| \cancel{= \|\tilde{T}x - Tx_n + Tx_n\|}$$

$$\cancel{\leq \|\tilde{T}x - Tx_n\| + \|Tx_n\|}$$

$$= \|\lim_{n\to\infty} Tx_n\| \overset{\text{Norm}}{\underset{\text{stetig}}{=}} \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| \leq M \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$$

$$= M \|\lim_{n\to\infty} x_n\|$$

$$= M\|x\|$$

Also ist $\tilde{T} \in L(X,Y)$, klarerweise gilt $T = \tilde{T}$ auf D

(wähle konstante Folge $x_n = x \in D$)

Eindeutigkeit:

Sei T' eine weitere $\overset{\text{stetige}}{}$ Fortsetzung von T

Zu $x \in X$ wähle wieder $x_n \in D$ mit $x_n \to x$

Dann: $(T' - \tilde{T})x \underset{\substack{T', \tilde{T} \\ \text{stetig}}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{(T' - \tilde{T})x_n}_{= 0, \text{ da beides Fortsetzungen von } T} = (T - T)x_n = 0$

also $T'y = \tilde{T}y = Ty \quad \forall y \in D$

Also ~~F = F~~ $(T' - \tilde{T}) = 0$, und also $T' = \tilde{T}$

b) Nach Vorauss. existiert $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \quad \forall x \in D$,

und $\|Tx\| \underset{\text{stetig}}{\overset{\|\cdot\|}{=}} \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq C\|x\|$, also ist

$T \in L(D, Y)$. Nach a) ex. $\tilde{T} \in L(X, Y)$, so dass $\tilde{T} = T$ auf D. $\tilde{T}$ ist Kandidat für punktweisen Limes der T_n auf ganz X

· Zu $x \in X$, $\varepsilon > 0$, wähle $y \in D$ mit $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{\|\tilde{T}\| + C}$

Damit ist $\|\tilde{T}x - T_n x\| \leq \|\tilde{T}y - T_n y\|$
$+ \|\tilde{T}x - \tilde{T}y\| + \|T_n y - T_n x\|$

$$\leq \|\tilde{T}y - T_n y\| + \|\tilde{T}\| \, \|x-y\| + C\|x-y\|$$

$$= \|\tilde{T}y - T_n y\| + (\|\tilde{T}\| + C)(\|x-y\|)$$

$$< \|\tilde{T}y - T_n y\| + \varepsilon$$

$$\overset{\tilde{T}=T \text{ auf } D}{=} \|Ty - T_n y\| + \varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon \,. \quad \varepsilon \text{ verschwindend}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_n x = \tilde{T}x \quad \forall x \in X$$

$\tilde{T} \in L(X,Y)$ nach a), also folgt die Behauptung.