Lösung Blatt 5

17)

"$\Rightarrow$"

Sei die Bedingung $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$ verletzt.

Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$,

so dass $|a_{n_k}| \geq k \quad \forall\, k\in\mathbb{N}$ gilt

Auf der Folge $b_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$
$\uparrow$ n_k-te Stelle

$(b_k \in d)$ gilt dann $\| A b_k \|_\infty$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} |(A b_k)_n|$$

$$= |a_{n_k} \cdot 1| \quad \text{(einziger von Null versch. Eintrag)}$$

$$\geq k$$

Also haben wir Folge konstruiert mit $\| b_k \|_\infty = 1$, aber

$\| A b_k \|_\infty \geq k \| b_k \|_\infty$, d.h. $\nexists\, M$ mit $\| A b \|_\infty \leq M \| b \| \quad \forall\, b \in d$.

"$\Leftarrow$"

$$\|Ab\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(Ab)_n|$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n b_n|$$

$$\le \underbrace{\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|\right)}_{\substack{<\infty \text{ n. Vor.} \\ =: M}} \underbrace{\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}|b_n|\right)}_{=\|b\|_\infty}$$

$$= M\,\|b\|_\infty \quad \forall\, b\in d,$$

also ist A stetig.

18

Es ist

$$F\left(\frac{v_m+v_n}{2}\right)+\frac{1}{2}\left\|\frac{v_m-v_n}{2}\right\|^2$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\frac{v_m-v_n}{2}\right\|^2-\ell\left(\frac{v_n}{2}\right)-\ell\left(\frac{v_m}{2}\right)$$

ℓ linear

Parall.

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\left(2\left\|\frac{v_m}{2}\right\|^2+2\left\|\frac{v_n}{2}\right\|^2\right)}_{=\frac{1}{4}\left(\|v_m\|^2+\|v_n\|^2\right)}-\frac{1}{2}\left(\ell(v_m)+\ell(v_n)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(F(v_m)+F(v_n)\right) \qquad (*)$$

Für eine Minimalfolge gilt $\frac{1}{2}\left(F(v_m)+F(v_n)\right) \xrightarrow[\min\{m,n\}\to\infty]{} \inf_{x\in X} F(x)$

und $F\left(\frac{v_m+v_n}{2}\right) \geq \inf_{x\in X} F(x)$ (aus Def. von inf)

Da weiter $\frac{1}{2}\left\|\frac{v_m-v_n}{2}\right\|^2 \geq 0$ gilt, folgt aus $(*)$, dass $\|v_m-v_n\| \xrightarrow[\min\{n,m\}\to\infty]{} 0$ gelten muss. D.h. jede Minimalfolge ist Cauchy.

Da X vollständig ist ~~(Bild)~~, ex. ~~$v \in X$~~

$v \in X$ mit $\|v - v_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Aus Stetigkeit der Norm und des Funktionals

ℓ folgt $\lim_{n\to\infty} F(v_n) = \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \ell(v_n)$

$$= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \ell(v) = F(v)$$

(insbesondere $\inf F(x) > -\infty$ $\quad = \inf_{x\in X} F(v)$ nach Wahl der v_n)

Idee (analog zum Projektionssatz): $F(v) = \min_{x\in X} F(x)$

$\Rightarrow$ ~~$t(\varepsilon)$~~ $t'(0) \overset{!}{=} 0$, wobei

$t_x(\varepsilon) := F(v + \varepsilon x)$ für beliebiges $x \in X$

Rechnung: $t_x'(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{F(v+\varepsilon x) - F(v)}{\varepsilon}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\|v+\varepsilon x\|^2 - \ell(v) - \varepsilon\ell(x) - \frac{1}{2}\|v\|^2 + \ell(v)\right)\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\langle v,x\rangle + \frac{1}{2}\varepsilon\langle x,v\rangle \cancel{+\|x\|^2} + \varepsilon^2\|x\|^2 - \varepsilon\ell(x) - \frac{1}{2}\|v\|^2\right)\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\langle v,x\rangle + \frac{1}{2}\langle x,v\rangle - \ell(x) + \varepsilon\|x\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\overline{\langle x, v\rangle}}_{\substack{=\langle x,v\rangle, \\ \text{da } \mathbb{K}=\mathbb{R}}} + \langle x, v\rangle\Big) - \ell(x) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \ell(x) = \langle x, v\rangle$ x war beliebig, damit folgt die Aussage.

19

Sei $g \in L^q([0,1])$. Dann gilt

$$\left| \int_0^1 (T_k f)(s)\, g(s)\, ds \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \int_0^1 k(s,t)\, f(t)\, g(s)\, ds\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|\, |f(t)|\, |g(s)|\, ds\, dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^{\frac{1}{p}} |f(t)|\ |k(s,t)|^{\frac{1}{q}} |g(s)|\, ds\, dt \qquad \left(\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1 \right)$$

Hölder
$$\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|\, |f(t)|^p\, ds\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^q\, |g(s)|^q\, ds\, dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 |k(s,t)|\, ds \right)}_{\text{Funktion von } t} |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 |k(s,t)|\, dt \right)}_{\text{Funktion von } s} |g(s)|^q\, ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\sup_t \left(\int_0^1 |k(s,t)|\, ds \right) \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \cdot \left(\sup_s \left(\int_0^1 |k(s,t)|\, dt \right) \right)^{\frac{1}{q}} \|g\|_q$$

~~B~~

Wähle $g(s) := |T_k f|^{p-1}(s) \in \cancel{L^q([0,1])}$

~~D~~

$$\|g\|_q =$$

$$= \left(\int_0^1 |T_k f|^{qp-q}(s)\, ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_0^1 |T_k f|^{p}(s)\, ds \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow p = qp - q \right)$$

$$= \|T_k f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Haben also $\|T_k f\|_p^{\,p}$

$$= \int_0^1 |T_k f|(s)\, |T_k f|^{p-1}(s)\, ds$$

$$\leq \left(\sup_t \left(\int_0^1 |k(s,t)|\, ds \right) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sup_s \left(\int_0^1 |k(s,t)|\, dt \right) \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$$

$$\cdot \|T_k f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow \|T_k f\|^{\overbrace{p - \frac{p}{q}}^{=1}} \leq \underbrace{\left(\sup_t \left(\int_0^1 |k(s,t)|\, ds \right) \right)^{\frac{1}{p}}}_{= \sup_t \left[\left(\int_0^1 |k(s,t)|\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \right]} \left(\sup_s \left(\int_0^1 |k(s,t)|\, dt \right) \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$$

$$= \sup_t \left[\left(\int_0^1 |k(s,t)|\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left[\text{analog} \right]$$

da $t \mapsto t^{\frac{1}{p}}$ monoton

Also $\| T_k \| = \sup_{\|f\|=0} \| T_a f \|$

$$\leq \sup_t \left[\left(\int_0^1 |k(s,t)| \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \right] \sup_s \left[\left(\int_0^1 |k(s,t)| \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$\blacksquare$

Lösungsvorschläge

29 a) Wir sollten hier nicht ganz vergessen, dass die Elemente aus $L^p(\mathbb{R})$ keine Funktionen sondern Klassen von Funktionen sind, wobei sich Funktionen aus einer Klasse lediglich auf einer Nullmenge unterscheiden. Wenn wir $f \in L^p(\mathbb{R})$ schreiben und dann von $f(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ die Rede ist, so ist dieser Ausdruck nicht wohldefiniert. Im vorliegenden Fall gilt allerdings: Für zwei Funktionen, die das selbe Element aus $L^p(\mathbb{R})$ repräsentieren, stimmen auch deren Bilder unter T_s wieder bis auf eine Nullmenge überein. Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t-s)\right|^p \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^p \mathrm{d}t \qquad (1 \leq p < \infty)$$

$$\text{bzw.} \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \left|f(t-s)\right| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \left|f(t)\right|$$

ist T_s eine Isometrie.

ersetzen durch
Treppenfkt. Argument

b) Wir beginnen mit $p < \infty$ und zeigen die Behauptung zunächst für $f \in C_c^\infty$. Es gibt also $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t \notin [a, b]$ und $c := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|f'(t)\right|$ existiert. Damit gilt

$$\left|\frac{f(t-s)-f(t)}{s}\right| \leq c$$

und weiter

$$\|T_s f - f\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int_{[a,b]\cup[a+s,b+s]} \left|f(t-s) - f(t)\right|^p \mathrm{d}t \quad \leq \quad (c\,|s|)^p \cdot 2(b-a) \xrightarrow{s\to 0} 0\,.$$

Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R})$. Da C_c^∞ dicht in $L^p(\mathbb{R})$ ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c^\infty$ mit $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$ und damit

$$\begin{aligned} \|T_s f - f\| &\leq \|T_s f - T_s g\| + \|T_s g - g\| + \|g - f\| \\ &= 2\,\|f - g\| + \|T_s g - g\| \leq 2\varepsilon + \|T_s g - g\| \xrightarrow{s\to 0} 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Da ε beliebig war, bleibt nur $\|T_s f - f\| \to 0$ wie behauptet.

Bemerkung: Wenn $(T_n)_n$ eine Folge stetiger linearer Operatoren und T ein stetiger linearer Operator in einem normierten Raum X sind derart, dass $T_n x \xrightarrow{n\to\infty} Tx$ gilt für alle $x \in X$, so sagt man T_n konvergiert *stark* gegen T. Im vorliegenden Fall konvergiert also T_s stark gegen id für $s \to 0$. Aus der starken Konvergenz folgt nicht notwendig Konvergenz in der Operatornorm, wie wir in c) sehen werden.

Im Fall $p = \infty$ betrachten wir $f := \chi_{[0,1]}$. Es ist $\|T_s f - f\|_\infty = 1$ für alle $s \neq 0$, also $\|T_s f - f\|_\infty \not\to 0$.

Zu 20b)

Wähle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$.

Dann gilt ~~f~~ $\operatorname{supp} f(\cdot - s) \subset [a+s, b+s]$ und

$$|f(t-s) - f(t)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t-s) - f(t)|$$

$$= \sup_{t \in (\operatorname{supp} f \,\cup\, \operatorname{supp} f(\cdot - s))} |f(t-s) - f(t)|$$

$$= \sup_{t \in ([a,b] \cup [a+s, b+s])} |f(t-s) - f(t)|$$

f kpt. Träger $\Rightarrow$ f gleichm. stetig

Also $|f(t-s) - f(t)| < \varepsilon$, falls $|t-s-t| = |s| < \delta$

$\Rightarrow$ ~~sup~~ $\sup |f(t-s) - f(t)| < \varepsilon$, falls $|s| < \delta$ unabh. von s, t

$$\Rightarrow \|T_s f - f\|_p^p = \int_{[a,b] \cup [a+s, b+s]} |f(\cancel{t-t}\, s) - f(t)|^p \, dt$$

ansonsten ist Funktion Null

$$\leq \left((b-a) + (b+s-(a+s))\right) \cdot \sup_{t \in [a,b] \cup [a+s, b+s]} |f(\cancel{s-t}\; t-s) - f(t)|^p$$

$< 2(b-a) \cdot \varepsilon$, falls $|s| < \delta$ $\Rightarrow \lim_{s \to 0} \|T_s f - f\|_p^p = 0$

(Zu $s_n \to 0$ ~~finde~~ und $\varepsilon_n \to 0$ finde δ_n)

c) Für $s > 0$ und $f_s := \left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \chi_{[0,s]}$ ist $\|f_s\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_0^s \frac{1}{s}\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = 1$ sowie

$$\left\|(T_s - \mathrm{id})f_s\right\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left\|T_s f_s - f_s\right\|_{L^p(\mathbb{R})} = 2 = 2\,\|f_s\|_{L^p(\mathbb{R})} .$$

Also gilt $\|T_s - \mathrm{id}\|_{B(L^p(\mathbb{R}))} \geq 2$ für alle $s > 0$ und damit $\|T_s - \mathrm{id}\|_{B(L^p(\mathbb{R}))} \not\to 0$.

30 a) Für beliebiges $z \in \mathcal{H}_K$ folgt mit $(*)$ sowie der Stetigkeit und Linearität des Skalarprodukts, dass durch $l_z(f) := f(z) = \langle f, K_z\rangle$ ein stetiges lineares Funktional $l_z : \mathcal{H}_K \to \mathbb{C}$ erklärt ist.

Sei nun umgekehrt $l_z : \mathcal{H}_K \to \mathbb{C}$, $l_z(f) := f(z)$, ein stetiges lineares Funktional für $z \in E$. Nach Satz 3.1.7 existiert ein $K_z \in \mathcal{H}_K$ derart, dass $l_z(f) = \langle f, K_z\rangle$ gilt.

b) Da $f_n \xrightarrow{w} f$ äquivalent ist zu $\langle f_n, g\rangle \to \langle f, g\rangle$ für alle $g \in \mathcal{H}_K$, folgt insbesondere $f_n(z) = \langle f_n, K_z\rangle \to \langle f, K_z\rangle = f(z)$ für alle $z \in E$.

Bemerkung: Da die Elemente der L^2-Räume keine Funktionen sondern Klassen von Funktionen sind und die Punktauswertung $z \mapsto f(z)$ dort nicht einmal wohldefiniert ist, ist L^2 auch kein RKHS. Wohl aber ℓ^2, wenn man dessen Elemente als Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ auffasst. Die Auswertung an einer Stelle n liefert die n-te Komponente der Folge und ist ein stetiges lineares Funktional.

31 a) Für $a \in \ell^2$ gilt, da jede ℓ^2-Folge beschränkt ist, $|a_n| \leq \|a\|_\infty$ für alle n und damit

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \|a\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n < \infty \qquad \text{für } |z| < 1\,;$$

die Reihe konvergiert also für alle $z \in E$. Da Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzgebietes holomorphe Funktionen darstellen, ist $Ta : E \to \mathbb{C}$ holomorph.

b) Die Abbildung $T : \ell^2 \to \mathcal{H}$ ist nach Konstruktion surjektiv und wegen des Identitätssatzes für Potenzreihen auch injektiv. Für $f, g \in \mathcal{H}$ ist also $\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} := \langle T^{-1}f, T^{-1}g\rangle_{\ell^2}$ wohldefiniert und T damit eine Isometrie.

c) Für $f \in \mathcal{H}$, etwa $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, und $z_* \in E$ gilt $c_* := (\overline{z_*}^n)_n \in \ell^2$ sowie

$$f(z_*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_*^n = \langle a, c_*\rangle_{\ell^2} = \langle Ta, Tc_*\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, K_{z_*}\rangle_{\mathcal{H}}$$

mit $K_{z_*} := Tc_*$. Also ist $\mathcal{H}$ ein RKHS; für $z, w \in E$ gilt

$$K_z(w) = \langle K_z, K_w\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z}^n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{z}\, w)^n = \frac{1}{1-\overline{z}\, w} .$$