13)

<u>Idee</u>: Isomorphismus zwischen $L^2([-\pi,\pi])$ und $l^2(\mathbb{Z})$

~~benutzen, dann~~ sowie Vollständigkeit von $l^2(\mathbb{Z})$

benutzen.

(Nach den Angaben aus Fourieranalysis ist

$$L^2([-\pi,\pi]) \ni f \longmapsto (\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots) \underbrace{\in l^2(\mathbb{Z})}_{\text{nach a)}}$$

~~da rechte Seite~~

bijektiv)

Sei $([f]^n)$ Cauchyfolge in $L^2([-\pi,\pi])$.

Dann existiert N_0, so dass $\| [f]^n - [f]^m \|_2 \leq \varepsilon$

$\forall\ n,m \geq N_0$ ist.

$$a) \Rightarrow \| [f]^n - [f]^m \|_{\#} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \varepsilon$$

$$= \| (f^n) - (f)^m \|_{l^2(\mathbb{Z})}, \quad \text{wobei } (f^n)$$

$$= (f^n)_k$$

$$= (\ldots, f^n_{-1}, f^n_0, f^n_1, \ldots)$$

die Folge der Fourierkoeff. ist.

Also ist die Folge (von Folgen) (f^n) eine Cauchy-Folge in $\ell^2(\mathbb{Z})$, die wegen dessen Vollständigkeit ~~konvergiert~~ gegen ein Element $\tilde{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ konvergiert.

~~Nach c) kon~~ $\tilde{f} = (\ldots, \tilde{f}_{-1}, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots)$

Nach c) konvergiert $\sum_{|k| \leq N} \tilde{f}_k e^{ikx}$ dann in $L^2([-\pi,\pi])$ gegen ein ~~Ele~~ Element $[f'] \in L^2([-\pi,\pi])$

<u>Beh.</u> $\| [f]^n - [f'] \|_{L^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

<u>Bew.</u> $\| [f]^n - [f'] \|_{L^2}^2$

$$\overset{b), c)}{=} \lim_{N \to \infty} \| S_{N, f^n} - \sum_{|k| \leq N} \tilde{f}_k e^{ikx} \|^2$$

$$= \lim_{N \to \infty} \| \sum_{|k| \leq N} (f_k^n - \tilde{f}_k) e^{ikx} \|^2$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{|k|, |l| \leq N} \langle (f_k^n - \tilde{f}_k) e^{ikx}, (f_l^n - \tilde{f}_l) e^{ilx} \rangle_{L^2} \right)$$

$$\overset{\text{Orthog.}}{=} \lim_{N \to \infty} 2\pi \left(\sum_{|k| \leq N} | f_k^n - \tilde{f}_k |^2 \right)$$

der e^{ikx}, $k \in \mathbb{Z}$

$$= 2\pi \, \|(f^n) - \tilde{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$$ (wohldef., da $(f^n), \tilde{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ((f^n) nach a)))

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$, da $\tilde{f}$ der Grenzwert von (f^n) in $\ell^2(\mathbb{Z})$ ist.

Also ist gezeigt, dass die Cauchyfolge $[f]^n$ in $L^2([-\pi,\pi])$ konvergiert. Diese war beliebig, also ist $L^2([-\pi,\pi])$ vollständig offene Kugel $U(y) = \{x \in X : d(x,y) < \varepsilon_y\}$ nur endlich viele a_n enthält. Weiter gilt $K \subseteq \bigcup\limits_{y \in K} U(y)$.

Da K kompakt ist, genügen endlich viele dieser offenen Mengen, um K zu überdecken; mit anderen Worten, es gibt $m \in \mathbb{N}$ und $y_1, \ldots, y_m \in K$ derart, dass $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} U(y_i)$.

Nun folgt aber, dass nur endlich viele der a_n in K liegen – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Bemerkung: Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes mit der Eigenschaft, dass jede Folge in K auch einen Häufungspunkt in K besitzt, nennt man *folgenkompakt.* Wir haben also gezeigt, dass in einem metrischen Raum jede kompakte Menge auch folgenkompakt ist.

b) Wir werden in der Vorlesung noch sehen, dass ℓ^2 mit diesem Skalarprodukt und der dazugehörigen Norm sogar vollständig, also ein Hilbert-Raum ist. Wir wollen dies hier vorerst nicht beweisen und nur verwenden, dass es sich bei

$$\|x\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

um eine Norm handelt.

Durch $e_1 := (1,0,0,0,0,\ldots)$, $e_2 := (0,1,0,0,0,\ldots)$, $e_3 := (0,0,1,0,0,\ldots)$ usw. ist eine Folge in B_1 definiert. Weiter gilt $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$. Insbesondere hat diese Folge also keinen Häufungspunkt. Nach a) ist B_1 folglich nicht kompakt.

In unendlichdimensionalen Räumen kann es also abgeschlossene beschränkte Mengen geben, die nicht kompakt sind!

5 Die Linearität im ersten Argument, d.h. $\langle f + h, g\rangle_w = \langle f, g\rangle_w + \langle h, g\rangle_w$ und $\langle \alpha f, g\rangle_w = \alpha\langle f, g\rangle_w$ für alle $f, g, h \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$, ist offensichtlich immer erfüllt.

Angenommen, es gibt ein $t_0 \in [0,1]$ mit $\operatorname{Im}\big(w(t_0)\big) > 0$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von w ein ganzes Intervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ mit $\operatorname{Im}\big(w(t)\big) > 0$ für alle $t \in [a,b]$. Wählt man nun $f \in X$ mit $f \neq 0$ aber $f(t) = 0$ für alle $t \notin [a,b]$, so ergibt sich auch

$$\operatorname{Im}\big(\langle f, f\rangle_w\big) = \operatorname{Im}\left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, w(t) \, \mathrm{d}t \right) > 0$$

und $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ ist kein Skalarprodukt.
Ganz analog zeigt man auch, dass es kein $t_0 \in [0,1]$ geben darf mit $\operatorname{Im}\big(w(t_0)\big) < 0$ oder $\operatorname{Re}\big(w(t_0)\big) < 0$.

Nehmen wir nun an, dass ein Intervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ existiert mit $\int\limits_a^b w(t)\,dt = 0$.
Mit f wie oben folgt dann $\langle f,f\rangle_w = 0$, obwohl $f \neq 0$.
Wir erhalten also die folgende notwendige Bedingung:

$$\boxed{w(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [0,1] \qquad \text{und} \qquad \int\limits_a^b w(t)\,\mathrm{d}t > 0 \quad \text{für alle } 0 \leq a < b \leq 1\,.}$$

Wir stellen nun noch fest, dass für reellwertiges w stets $\langle f,g\rangle_w = \overline{\langle g,f\rangle_w}$ gilt.
Weiter sei nun $f \in X$, $f \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ und $[a,b] \subseteq [0,1]$ derart, dass $|f(t)|^2 > \delta$ für alle $t \in [a,b]$ ist und damit auch

$$\langle f,f\rangle_w = \int\limits_0^1 |f(t)|^2\, w(t)\,\mathrm{d}t \geq \int\limits_a^b |f(t)|^2\, w(t)\,\mathrm{d}t > \delta \int\limits_a^b w(t)\,\mathrm{d}t > 0\,.$$

Folglich ist obige Bedingung auch hinreichend.

Insbesondere ist also auch $\langle f,g\rangle := \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ ein Skalarprodukt.

b) Da w stetig, nicht-negativ und nicht identisch 0 ist, gilt $c := \max\limits_{t\in[0,1]} w(t) > 0$ und weiter

$$\|f\|_w = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^2\, w(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{c}\left(\int\limits_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c}\,\|f\|$$

für alle $f \in X$.
Falls $d := \min\limits_{t\in[0,1]} w(t) > 0$ gilt, erhalten wir analog $\|f\|_w \geq \sqrt{d}\,\|f\|$ für alle $f \in X$.

Wir zeigen nun noch, dass umgekehrt aus der Äquivalenz von $\|\cdot\|_w$ und $\|\cdot\|$ stets $\min\limits_{t\in[0,1]} w(t) > 0$ folgt. Angenommen, es gilt $d := \min\limits_{t\in[0,1]} w(t) = 0$.
Wegen der Stetigkeit von w gibt es dann zu $\delta > 0$ ein Intervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ mit $w(t) < \delta$ für alle $t \in [a,b]$. Wählt man wieder $f \neq 0$ derart, dass $f(t) = 0$ für $t \notin [a,b]$ gilt, so ergibt sich

$$\|f\|_w = \left(\int\limits_a^b |f(t)|^2\, w(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\delta}\,\|f\|\,.$$

Da δ beliebig klein gewählt werden kann, gibt es also kein $m > 0$ derart, dass $\|f\|_w \geq m\,\|f\|$ für alle $f \in X$ gilt.

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $\|\cdot\|_w$ äquivalent zur „gewöhnlichen" Norm ist genau dann, wenn das Minimum von w ungleich 0 ist. Wegen der Stetigkeit ist dies gleichbedeutend mit $w(t) > 0$ für alle $t \in [0,1]$.

Lösungsvorschläge

21 Man kann leicht nachrechnen, dass $\|\cdot\|$ tatsächlich eine Norm in $\mathbb{C}[z]$ ist. Auch die Linearität der gegebenen Funktionale und Operatoren ist leicht einzusehen.

a) Wegen

$$|f_1(p)| = \left| \int_0^1 \sum_{k=0}^n a_k t^k \,\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| = \|p\|$$

ist f_1 stetig.

Auch f_2 ist stetig, da $|f_2(p)| = |p'(0)| = |a_1| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| = \|p\|$ gilt.

Wir betrachten nun die Folge $(p_m)_m$, definiert durch $p_m(z) := z^m$. Offensichtlich gilt $\|p_m\| = 1$ für alle m. Andererseits ist $|f_3(p_m)| = |p'_m(1)| = m-1$, woraus $\sup_{\|p\|=1} |f_3(p)| = \infty$ folgt. Also ist f_3 nicht stetig.

b) Mit p_m wie oben erhalten wir $T_1 p_m(z) = p_m(z+1) = (z+1)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z^k$, also

$$\|T_1 p_m\| = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \geq m\,.$$

Daraus folgt $\sup_{\|p\|=1} \|T_1 p\| = \infty$ und T_1 ist nicht stetig.

Es ist $T_2 p(z) = \int_0^z \sum_{k=0}^n a_k \zeta^k \,\mathrm{d}\zeta = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}$ und damit

(komplexes Wegintegral) Stammf. von z^k analog zum Reellen)

$$\|T_2 p\| = \sum_{k=0}^n \left| \frac{a_k}{k+1} \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| = \|p\|\ ,$$

also ist T_2 stetig.

22 a) Wir nehmen an, $(x_n)_n$ ist eine konvergente Folge in X mit Grenzwert x. Weiter sei $f \in X^*$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der Stetigkeit von f eine Zahl $\eta > 0$ derart, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt für alle $y \in X$ mit $\|x - y\| < \eta$. Da die Folge $(x_n)_n$ konvergent ist, finden wir nun ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\|x - x_n\| < \eta$ gilt für alle $n > N$. Insgesamt gilt also $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Da f beliebig gewählt werden kann, gilt folglich $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ für alle $f \in X^*$, d.h. die Folge ist schwach konvergent.

b) Nach Satz 3.1.7 gibt es zu jedem $f \in \mathcal{H}^*$ ein $x_f \in \mathcal{H}$ mit $f(x) = \langle x, x_f \rangle$ und umgekehrt wird durch jedes $y \in \mathcal{H}$ mittels $\varphi(x) := \langle x, y \rangle$ ein stetiges lineares Funktional φ erklärt. Daher ist die Behauptung nichts weiter als eine äquivalente Formulierung der Definition.

16

Setze $Y := \left(C^2([0,1]), \| \ \|_{C^2} \right)$

$\|Ay\|_\infty$ ~~$= \|Ay\|$~~ $\left(\|f\|_{C^2} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty \right)$

Linearität von A ist klar wg. Linearität der Ableitung

$$\overset{\text{Def.}}{=} \sup_{x \in [0,1]} | y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) |$$

$$\overset{\triangle\text{-Ugl.}}{\leq} \sup_{x \in [0,1]} | y''(x) | + \sup_{x \in [0,1]} | a_1(x) y'(x) | + \sup_{x \in [0,1]} | a_0(x) y(x) |$$

$$\leq \| y'' \|_\infty + \left(\sup_{x \in [0,1]} | a_1(x) | \right) \| y' \|_\infty + \left(\sup_{x \in [0,1]} | a_0(x) | \right) \| y \|_\infty$$

$$\leq \| y'' \|_\infty + \max \{ \| a_1 \|_\infty, \| a_0 \|_\infty \} \left(\| y' \|_\infty + \| y \|_\infty \right)$$

$$\leq \underbrace{\max \{ 1, \| a_0 \|_\infty, \| a_1 \|_\infty \}}_{=: C} \left(\| y \|_\infty + \| y' \|_\infty + \| y'' \|_\infty \right)$$

$$= C \left(\| y \|_\infty + \| y' \|_\infty + \| y'' \|_\infty \right)$$

$= C \| y \|_{C^2}$. Also ist

$$A : \left(C^2([0,1]), \| \cdot \|_{C^2} \right) \longrightarrow \left(C[0,1], \| \cdot \|_\infty \right)$$

beschränkt und als linear Abb. daher stetig.

Aber: z.B. ist

$$D : \left(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right) \longrightarrow C\left([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$$

$$f \longmapsto f'$$

nicht stetig: $f_n(x) = x^n$ sind $\in C^1([0,1])$, und

$$\|f_n\|_\infty = 1, \text{ aber } \|Df_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n'(x)|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} |n\, x^{n-1}| = n$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$