Ist X ein metrischer Raum, so definiert man eine total beschränkte Menge A als eine, für die es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $E_\varepsilon \subset X$ gibt, so dass

$$A \subset \bigcup_{x \in E_\varepsilon} B_\varepsilon(x).$$

Offensichtlich ist jede Teilmenge einer total beschränkten Menge ebenfalls total beschränkt.

9.1. Lemma. *Ist X ein metrischer Raum und $A \subset X$ total beschränkt, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Punkte $y_1, \ldots, y_m$ aus A, so dass*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{m} B_\varepsilon(y_n).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da A total beschränkt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_m$ aus X mit

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{m} B_{\varepsilon/2}(x_n),$$

hier können wir annehmen, dass

$$A \cap B_{\varepsilon/2}(x_k) \neq \varnothing \text{ für alle } k = 1, \ldots, m.$$

Wir wählen nun $y_1, \ldots, y_m$ mit

$$y_k \in A \cap B_{\varepsilon/2}(x_k) \quad k = 1, \ldots, m.$$

Nun gilt

$$B_{\varepsilon/2}(x_k) \subset B_\varepsilon(y_k) \text{ für alle } k = 1, \ldots, m,$$

denn für $z \in B_{\varepsilon/2}(x_k)$ gilt

$$d(z, y_k) \leq d(z, x_k) + d(x_k, y_k) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Wir haben also

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{m} B_{\varepsilon/2}(x_n) \subset \bigcup_{n=1}^{m} B_\varepsilon(y_n)$$

mit $y_1, \ldots, y_m$ aus A. □

9.2. Lemma. *Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ totalbeschränkt, dann ist der Abschluss von A ebenfalls total beschränkt.*

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass $\overline{B_{\varepsilon/2}(x)} \subset B_\varepsilon(x)$. Um dies zu sehen sei $y \in \overline{B_{\varepsilon/2}(x)}$ und (y_n) eine Folge in $B_{\varepsilon/2}(x)$ mit Grenzwert y. Es gilt also $d(y_n, x) < \varepsilon/2$ für alle n. Da (y_n) konvergiert gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(y_N, y) < \varepsilon/2$. Damit ist

$$d(y, x) \leq d(y, y_N) + d(y_N, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$ □

Wir bemerken noch, dass jede total beschränkte Menge beschränkt ist, aber eine beschränkte Menge muss nicht total beschränkt sein.

Das folgende Theorem, dessen Beweis und Korollar stammen aus dem Buch *Functional Analysis* von *Balmohan Vishnu Limaye*

9.3. Theorem. *Sei X ein metrischer Raum, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(a) *X ist kompakt.*
(b) *Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.*
(c) *X ist vollständig und total beschränkt.*

Beweis. (a) $\implies$ (b): Sei (y_n) eine Folge in X. Gäbe es keine konvergente Teilfolge, so gäbe es für jedes $x \in X$ ein $r(x) > 0$ und ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit

$$y_n \notin B_{r(x)}(x) \text{ für alle } n \geq n(x).$$

Da $X \subset \bigcup_{x \in X} B_{r(x)}(x)$ kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_m$ aus X mit

$$X \subset B_{r(x_1)}(x_1) \cup \ldots \cup B_{r(x_m)}(x_m).$$

Mit $N := \max\{n(x_1), \ldots, n(x_m)\}$ ist aber $y_N \notin B_{r(x_k)}(x_k)$ für $k = 1, \ldots, m$. Also $y_N \notin X$.

(b) $\implies$ (c): Sei (x_n) eine Cauchy Folge in X und sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert x. Sei $\varepsilon > 0$. Da (x_n) eine Cauchy Folge ist, gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon/2$ für alle $m, n \geq M$, und da (x_{n_k}) konvergiert, gibt es ein $N \geq M$ mit $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon/2$ für alle k mit $n_k \geq N$. Sei $n_k \geq N$, dann ist

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Also konvergiert (x_n) gegen x, d.h. X ist vollständig.

Wir nehmen nun an, dass X nicht total beschränkt ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass X nicht durch endlich viele Kugeln mit Radius ε überdeckt werden kann. Sei $x_1 \in X$. Sind $x_1, \ldots, x_n \in X$ gegeben, so wähle ein $x_{n+1} \in X$ mit

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k).$$

Die so konstruierte Folge (x_n) kann dann keine konvergente Teilfolge besitzen, da $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für alle $m \neq n$.

(c) $\implies$ (a): Angenommen X ist nicht kompakt. Sei $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Da X total beschränkt ist gibt es eine endliche Menge $E_1 \subset X$ mit $X \subset \bigcup_{x \in E_1} B_1(x)$. Damit gibt es dann ein $x_0 \in E_1$, so dass $U_0 := B_1(x_0)$ nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathscr{U}$ überdeckt werden kann. Da U_0 ebenfalls total beschränkt ist, gibt es ein $x_1 \in U_0$, so dass $U_1 := B_{1/2}(x_1)$ nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathscr{U}$ überdeckt werden kann. Auf diese Art finden wir eine Folge (x_n) in X mit der Eigenschaft, dass

$$x_{n+1} \in U_n := B_{1/2^n}(x_n) \text{ und } U_n \text{ besitzt keine endliche Teilüberdeckung aus } \mathscr{U}.$$

Es gilt für $m > n$, dass

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

damit ist (x_n) eine Cauchy Folge. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da X von $\mathscr{U}$ überdeckt wird, gibt es eine Menge V der Überdeckung mit $x \in V \in \mathscr{U}$. Wähle $r > 0$, so dass $U := B_r(x) \subset V$, wähle außerdem ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d(x_n, x) < r/2 \text{ und } 1/2^n < r/2.$$

Nun gilt $U_n \subset U \subset V$, denn aus $y \in U_n$ folgt $d(x_n, y) < 1/2^n$ und somit

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < r/2 + 1/2^n < r.$$

Dann besitzt aber U_n eine endliche Teilüberdeckung von $\mathscr{U}$, nämlich $\{V\}$, im Widerspruch zur Konstruktion von U_n. $\square$

Aus diesem Theorem folgt sofort.

9.4. Korollar. Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt:

(a) A ist kompakt genau dann, wenn A abgeschlossen und total beschränkt ist.

(b) $\overline{A}$ ist kompakt genau dann, wenn A total beschränkt ist.

Wir kommen nun zu

Aufgabe 34. Sei $t = (t_1, t_2, \ldots) \in \ell^\infty$ und sei der Operator T auf ℓ^2 durch

$$(Ta)_i := t_i a_i \quad (i \in \mathbb{N})$$

definiert. Dann ist T genau dann kompakt, wenn $\lim_{j\to\infty} t_j = 0$ gilt.

Lösung. Sei $\lim_{j\to\infty} t_j = 0$. Wir zeigen, dass die Menge $T(B_1(0))$ total beschränkt ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|t_j| < \varepsilon/\sqrt{2} \text{ für alle } j > N.$$

Ferner sei $K := \{\tilde{x} \in \mathbb{C}^N : \|\tilde{x}\|_* \le \|t\|_\infty\}$, wobei $\|(x_1, \ldots, x_N)\|_* := \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^2\right)^{1/2}$. Da K total beschränkt ist gibt es $\tilde{y}^{(1)}, \ldots, \tilde{y}^{(m)} \in \mathbb{C}^N$, so dass

$$K \subset \bigcup_{k=1}^m B_{\varepsilon/\sqrt{2}}(\tilde{y}^{(k)})$$

Definiere

$$y^{(k)} := (\tilde{y}_1^k, \ldots, \tilde{y}_N^k, 0, 0, \ldots) \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Sei nun $x \in B_1(0)$. Setze $\tilde{z} := (t_1 x_1, \ldots, t_N x_N)$. Dann ist $\tilde{z} \in K$, denn

$$\|\tilde{z}\|_*^2 = \sum_{i=1}^N |t_i x_i|^2 \le \|t\|_\infty^2 \sum_{i=1}^N |x_i|^2 \le \|t\|_\infty^2 \|x\|^2 \le \|t\|_\infty^2,$$

und somit gibt es ein $p \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\tilde{z} \in B_{\varepsilon/\sqrt{2}}(\tilde{y}^{(p)})$ und wir haben

$$\begin{aligned}
\|Tx - y^{(p)}\|^2 &= \sum_{i=1}^N |t_i x_i - \tilde{y}_i^{(p)}|^2 + \sum_{i=N+1}^\infty |t_i|^2 |x_i|^2 \\
&< \|\tilde{z} - \tilde{y}^{(p)}\|_*^2 + \varepsilon^2/2 \sum_{i=N+1}^\infty |x_i|^2 \\
&< \varepsilon^2/2 + \varepsilon^2/2.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$T(B_1(0)) \subset \bigcup_{k=1}^m B_\varepsilon(y^{(k)}).$$

Die andere Richtung wurde schon besprochen. $\square$

Eine andere Variante des Beweises benutzt das folgende Lemma, welches in *Reed and Simon's Functional Analysis (Re. En. Edition)* (Theorem I.24) zu finden ist.

9.5. Lemma (Diagonal-Lemma)**.** *Sei* $(x^{(n)})$ *eine Folge von Folgen, also für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$*. Wenn für jedes* k *die Folge* $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist, dann gibt es eine Teilfolge* n_i*, so dass für alle* $i \in \mathbb{N}$ *die Folge* $(x_k^{(n_i)})_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

Beweis. Da die erste Komponentenfolge $(x_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $j \mapsto T(1,j)$, so dass $(x_1^{(T(1,j))})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Betrachten wir nun $(x_2^{(T(1,j))})_{j\in\mathbb{N}}$, so ist diese Folge als Teilfolge einer beschränkten Folge wieder beschränkt. Also gibt es von dieser Teilfolge eine Teilfolge $j \mapsto T(2,j)$, so dass $(x_2^{(T(2,j))})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Außerdem ist $(x_1^{(T(2,j))})_{j\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge einer konvergenten Folge wieder konvergent. Fahren wir so fort, so finden wir zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $j \mapsto T(N,j)$ mit den Eigenschaften

$$\{T(N,j) : j \in \mathbb{N}\} \subset \{T(N-1,j) : j \in \mathbb{N}\} \subset \ldots \subset \{T(1,j) : j \in \mathbb{N}\}$$

$$(x_k^{(T(N,j))})_{j\in\mathbb{N}} \text{ für } k \leq N \text{ konvergiert.}$$

Nun könnte man versucht sein $T := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{T(n,j) : j \in \mathbb{N}\}$ zu benutzen, was leider nicht möglich ist, da dieser Durchschnitt leer sein kann. Stattdessen definieren wir nun

$$n_i := T(i,i) \text{ für } i \in \mathbb{N} \quad \text{(Diagonal Trick).}$$

Man sieht leicht ein, dass $i \mapsto n_i$ tatsächlich streng monoton steigend ist.

Wir zeigen nun, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(x_k^{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert . Sei also $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Dann ist

$$(x_k^{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = (x_k^{T(1,1)}, \ldots, x_k^{T(k,k)}, x_k^{T(k+1,k+1)}, x_k^{T(k+2,k+2)}, \ldots),$$

damit ist die Konvergenz dieser Folge gezeigt, wenn $(x_k^{T(k+j,k+j)})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Es gilt

$$\{T(k+j,k+j) : j \in \mathbb{N}\} \subset \{T(k,j) : j \in \mathbb{N}\},$$

damit ist $(x_k^{T(k+j,k+j)})_{j\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge der konvergenten Folge $(x_k^{T(k,j)})_{j\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent. □

Mit Hilfe dieses nützlichen Lemmas beweisen wir nun die Aussage aus **Aufgabe 34**

Beweis. Wir zeigen die Kompaktheit von T über das Folgenkriterium. Sei dazu $(x^{(n)})$ eine beschränkte Folge in ℓ^2, damit gibt es ein $C > 0$ mit

$$\|x^{(n)}\| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt, dass auch die Komponentenfolgen $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind, denn für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_i^{(n)}|^2 \leq \|x^{(n)}\|^2 \leq C^2.$$

Nach dem Diagonal-Lemma gibt es also eine Teilfolge n_k, so dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Folge $(x_i^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert, sagen wir x_i, besitzt. Setze nun

$$x := (x_1, x_2, \ldots).$$

Wir zeigen nun, dass $x \in \ell^2$. Definiere dazu für $R \in \mathbb{N}$, $\chi_R : \ell^2 \to \ell^2$ durch

$$(\chi_R y)_i := \begin{cases} y_i, & i \leq R \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $R \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$, wähle ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_i^{n_N} - x_i| < \varepsilon \text{ für alle } i \leq R.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\|\chi_R x\| &\leq \|\chi_R x - \chi_R x^{(n_N)}\| + \|\chi_R x^{(n_N)}\| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{R} |x_i^{n_N} - x_i|^2 \right)^{1/2} + \|x^{(n_N)}\| \\
&< \left(\sum_{i=1}^{R} \varepsilon^2 \right)^{1/2} + C \\
&= \varepsilon \sqrt{R} + C
\end{aligned}$$

Da ε beliebig war gilt $\|\chi_R x\| \leq C$. Da R auch beliebig war gilt somit $\|x\| \leq C$, also $x \in \ell^2$.

Wir zeigen nun, dass $Tx^{(n_k)} \xrightarrow{k \to \infty} Tx$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $|t_j| \leq \varepsilon$ für alle $j \geq N$. Wähle $M \in \mathbb{N}$, so dass für $i = 1, \ldots, N$, $|x_i^{n_k} - x_i| < \varepsilon / \sqrt{N}$ für alle $k \geq M$. Dann gilt für $k \geq M$

$$\begin{aligned}
\|Tx^{(n_k)} - Tx\|^2 &= \sum_{i=1}^{N} |t_i|^2 |x_i^{n_k} - x_i|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} |t_i|^2 |x_i^{n_k} - x_i|^2 \\
&\leq \|t\|_\infty^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i^{n_k} - x_i|^2 \\
&\leq \|t\|_\infty^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \|x^{n_k} - x\|^2 \\
&\leq \|t\|_\infty^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \left(\|x^{n_k}\| + \|x\| \right)^2 \\
&\leq \left(\|t\|_\infty^2 + 4C^2 \right) \varepsilon^2
\end{aligned}$$

Da ε beliebig war gilt folgt die Behauptung. $\square$