4) FA Blatt 2 - Musterlösung

a) $\Rightarrow$ b)

Annahme, $Y \setminus A$ sei nicht offen.

Dann ex. ein $x \in Y\setminus A$, so dass

$$B_\varepsilon(x) \cap Y\setminus(Y\setminus A)$$

$$= B_\varepsilon(x) \cap A$$

$$\neq \emptyset \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

$\Rightarrow$ Dies liefert eine Folge $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$

mit $x_n \to x$, aber $x \in Y/A$,

also $x \notin A$.

b) $\Rightarrow$ a)

Sei $(x_n) \subset A$ mit $x_n \to x$, aber $x \notin A$,

also $x \in Y/A$. Da $Y\setminus A$ offen n. Vorauss.,

existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset Y\setminus A$,

insbesondere also $\|y - x\| \geq \varepsilon \;\; \forall\, y \in A$,

speziell also $\|x_n - x\| \geq \varepsilon$, im Widerspruch zu $x_n \to x$.

5) Werner, Satz I.2.1, Korollar I.2.2

7) Werner, Satz I.2.10

8) ~~$1 \le p \le q < \infty$. Sei f~~

6a) Werner, S. 819 (4. Auflage)

Es reicht, die Abgeschlossenheit von c zu zeigen, c_0 kommt dann mit rans

b)

- d liegt dicht in ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$

Bew.

Zu $a = (a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$

setze $b_m := (b_m^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} := (a_1, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots) \in d$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a^{(n)}|^p < \varepsilon$$

(möglich, da die Reihe nach Vor. konvergiert)

Für $m \geq N$ gilt dann

$$\| a - b_m \|_p^p = \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n - 0|^p$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|^p < \varepsilon$$

• d nicht dicht in ℓ^∞

Bew.:

Es ist $a := (a^{(n)}) := (1,1,1,\ldots) \in \ell^\infty$

Aber für jedes $b \in d$ ist mind. ein $b^{(n_0)} = 0$,

also $\|a-b\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a^{(n)} - b^{(n)}| \geq 1$, und

daher kann es kein Folge $b_n \in d$ mit

$\|a-b_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ geben.

8a)

$1 \leq p \leq q < \infty$. Sei $f \in L^q([a,b])$

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p$$

$$= \| |f|^p \cdot 1 \|_1$$. Wähle $q' = \frac{q}{p}$, $r' = \frac{q}{q-p}$

Da gilt $\frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = \frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = \frac{q}{q} = 1$

Da $[a,b]$ beschränkt, ist $\int_a^b (1)^{r'} = \int_a^b 1$

$$= (b-a) < \infty,$$

also ~~die Fkt~~ $1 \in L^{r'}([a,b])$

$$\| |f|^p \|_{q'} = \| |f|^p \|_{\frac{q}{p}}$$

$$= \left(\int |f|^{p \frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \left(\left(\int |f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p$$

$= (\|f\|_q)^p < \infty$ nach ~~Voraussetzung~~ Va.

$\Rightarrow$ $|f|^p \in L_{q'}([a,b])$

und Hölder liefert

$$\| |f|^p \cdot 1 \|_1$$

$$\leq \| |f|^p \|_{q'} \cdot \| 1 \|_{r'}$$

$$= (\|f\|_q)^p \cdot \left(\int_a^b (1)^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}}$$

$$= (\|f\|_q)^p \cdot (b-a)^{\frac{q-p}{q}}$$

$t \mapsto (t)^{\frac{1}{p}}$ monoton

$$\Longrightarrow \|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \underbrace{\left((b-a)^{\frac{q-p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}}_{= (b-a)^{\frac{q-p}{qp}} = (b-a)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}}$$

$$\Rightarrow (b-a)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \|f\|_q (b-a)^{-\frac{1}{q}}, \text{ Q.E.D.}$$

8b) Gegenbeispiele:

i) z.B. für $I = [1,\infty)$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\right]_1^\infty$$

$$= \frac{1}{2} < \infty \text{, also } \frac{1}{x} \in L^2([1,\infty))$$

aber $\int_1^\infty \frac{1}{x} = \lim_{R\to\infty} [\log x]_1^R = \infty$, d.h.

$$\frac{1}{x} \notin L^1([1,\infty))$$

ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{x}\,\right]_0^1 = 2$, also $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1[(0,1)]$

aber $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \int_0^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} [\log x]_\varepsilon^1$

$= -\infty$, d.h.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \notin L^2[0,1].$$

Bem. Inklusion gilt also bereits auf beschränkten I nicht, also erst recht nicht auf unbeschr. (setze z.B. durch 0 fort.)

5a)

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\| \le \|x_n-x\| + \|y_n-y\| \longrightarrow 0$$

b)

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \le \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\|$$

$$= \underbrace{|\lambda_n|}_{\text{beschr.}} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}} + \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}} \|x\|$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

c)

$$\|x\| - \|y\| = \|x-y+y\| - \|y\|$$

$$\overset{\Delta}{\le} (\|x-y\| + \|y\|) - \|y\|$$

$$= \|x-y\|$$

und $\|y\| - \|x\| \le \|x-y\|$

ergibt "Δ-Ungl. nach unten": $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$

$$\Rightarrow \big|\|x_n\| - \|x\|\big| \le \|x - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d) Sei U UVR, $\overline{U}$ sein Abschluß

$x, y \in \overline{U}$: $\exists$ ~~$x_n \to x$~~ $x_n, y_n \in U$ mit

$x_n \to x$, $y_n \to y$

$\Rightarrow U \ni x_n + y_n \to x + y$, d.h. $x+y \in \overline{U}$

$\underbrace{(\lambda x_n)}_{\in U} \longrightarrow \lambda x_n$, d.h. λx ebenfalls in $\overline{U}$

$\Rightarrow \overline{U}$ UVR.

6a) $c_0 \subset l^\infty$ abgeschl.: VL

$c \subset l^\infty$ abgeschl.: analog

$d \subset l^\infty$ nicht abgeschlossen:

$$a_n := \left(1, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$$

$$a := \left(1, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1}, \dots\right) = \left(\tfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Es ist $a_n \in d$, und $\|a_n - a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - a|$

$$= \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

aber $a \notin d$

7) <u>Beh.:</u> $\underbrace{P([a,b])}_{\text{UVR der Polynome}}$ liegt dicht in $C([a,b])$

<u>Bew.:</u>

<u>Idee:</u> Für ein $f \in C([a,b])$, konstruiere appr. Polynome aus ~~f~~ Werten von f an "Stützstellen".

~~O.B.d.A.~~
~~a = 0, b =~~

<u>Def.</u> $p_n(x) := B_n(x; f)$ ~~$:= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$~~

$$:= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{(Bernstein-polyn.)}$$

<u>O.b.d.A.</u> $a=0, b=1$, betrachte reelle Fkt.

(sonst ~~re~~ Reskalieren, Re & Im separat)

<u>Z.z.:</u> $\|p_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

- $[0,1]$ kompakt, f stetig $\Rightarrow$ f ~~glm~~ gleichm. stetig

d.h. ~~∀~~ zu $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ mit

$$|x-y| \le \sqrt{\delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon \quad (*)$$

~~Setze~~ Setze $\alpha := \frac{2\|f\|_\infty}{\delta}$

Dann gilt $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon + \alpha (y-x)^2 \quad \forall x,y \in [0,1]$ $(**)$

[Begr.: • $|y-x| \leq \sqrt{\delta}$: $(*)$ liefert

$$|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \leq \varepsilon + \underbrace{\alpha(y-x)^2}_{\geq 0}$$

• $|y-x| > \sqrt{\delta}$: $\varepsilon + \alpha(y-x)^2$

$$> \varepsilon + \alpha\,\delta \overset{\text{Def. von } \alpha}{=} \varepsilon + 2\|f\|_\infty$$

$$\overset{\sup}{>} |f(x)| + |f(y)|$$

$$\overset{\triangle\text{-Ugl.}}{\geq} |f(x)-f(y)| \quad]$$

Definiere $g_y(x) := (y-x)^2$

$\Rightarrow$ $(**)$ nimmt die Form

$$-(\varepsilon + \alpha\, g_y) \leq f - f(y) \leq \varepsilon + \alpha\, g_y \quad (***)$$

(als ~~Gl.~~ Ungl. zwischen Fkt. von x für jedes $y \in [0,1]$)

an.

Beide Bernsteinpolynome für $f_j(x) = x^j,\ j=0,1,2$:

$$B_n(x; f_0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \cdot \underbrace{1}_{=x^0}$$

$$\overset{\text{Bin. Satz}}{=} (s+(1-s))^n$$

$$= 1^n$$

$$= 1$$

$$B_n(x; f_1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \underbrace{\left(\frac{i}{n}\right)}_{=f_1(\frac{i}{n})}$$

$$\overset{\text{Def. von }()}{=} \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} x^i (1-x)^{n-i} \qquad \binom{n}{i}\frac{i}{n} = \binom{n-1}{i-1}$$

$$\underset{\text{versch.}}{\overset{\text{Index}}{=}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{i+1} \underbrace{(1-x)^{n-(i+1)}}_{=(1-x)^{(n-1)-i}}$$

$$= x \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{(n-1)-i} \right)$$

$$= x \left((x+(1-x))^{n-1} \right)$$

$$= x$$

~~Analog~~: Analog:

$$B_n(x; f_2) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$$

Bemerkung:

Wegen der Struktur der Bernsteinpolynome ~~überträgt~~ übertragen sich Ungleichungen zwischen Funktionen (wie in (★★★)) auf die ~~das~~ aus diesen gebildeten B.-pol.

$$\overset{(★★★)}{\Longrightarrow} \quad \left(-B_n(\cdot\,; \varepsilon + \alpha g_y)\right) \overset{\shortparallel}{} B_n(\cdot\,; -\varepsilon - \alpha g_y)$$

$$\leq B_n(\cdot\,; \underbrace{f - f(y)}_{\text{Fktn x Konstante bzg. } \xi}) \leq B_n(\cdot\,; \varepsilon + \alpha g_y) \quad \forall y \in [0,1]$$

x !

$$\Rightarrow |p_n(x) - f(x)|$$

$$= |B_n(x; f) - f(y)|$$

$$= |B_n(x; f) - B_n(x; \overset{\text{als Konstante}}{\widetilde{f(y)}})|$$

B.-polyn. linear in f

$$= |B_n(x; f - f(y))|$$

$$\leq B_n(x;\, \varepsilon + \alpha g_y)$$

$$= \varepsilon + \alpha y^2 - 2\alpha x y + \alpha\left(\frac{x(1-x)}{n} + x^2\right)$$

$x = y$:

$$|p_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon + \alpha\left(\frac{y(1-y)}{n}\right)$$

$$\underbrace{\leq \varepsilon + \frac{\alpha}{n}}_{\text{unabh. von } y} \quad \forall\ y \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \|p_n - f\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\alpha}{n}$$

$$\Rightarrow \|p_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$