FA Blatt 1 – Musterlösung

1) **Beh.:** $d \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell^\infty$

$$d \subsetneq \ell^p \subsetneq \ell^q \subsetneq c_0 \quad \text{für } 1 \leq p < q < \infty$$

Bew.:

- ~~…~~ $a \in d \Rightarrow (a_n) = 0$ für alle bis auf endl. viele $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, d.h. $a \in c_0$.

$a := (a_n) = \frac{1}{n} \in c_0$, aber $a \notin d$

- $c_0 \subsetneq c$ klar, da jede Nullfolge insb. konvergent, aber nicht jede konv. Folge gegen Null konv.
- $c \subset \ell^\infty$, da konvergente Folgen beschränkt sind

$c \subsetneq \ell^\infty$, da z.B. $(-1)^n$ beschränkt, aber nicht konvergent.

- $d \subset \ell^p$, $1 \le p < \infty$

klar da ~~Summe~~ für $a \in d$ die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ endlich ist.

$d \subsetneq \ell^p$, da z.B. $a := \left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$ für ein $\varepsilon > 0$

$\in \ell^p$, aber $a \notin d$.

(Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ist konv. genau dann, wenn $s > 1$ gilt)

- $\ell^p \subset \ell^q$ für $1 \le p < q < \infty$

Bew: Sei $a \in \ell^p$. o.B.d.A gelte $\|a\|_p = 1$ (sonst betrachte $\frac{a}{\|a\|_p}$)

$$\|a\|_p = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = 1$$

$$\Rightarrow |a_n|^p \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow |a_n| \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$q > p \Rightarrow |a_n|^q \le |a_n|^p \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|a\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\underset{\text{monoton}}{\overset{t \mapsto (t)^{\frac{1}{q}}}{\le}} \left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p}_{= 1 \text{ nach Vor.}}\right)^{\frac{1}{q}} = 1 = \|a\|_p$$

~~Also gilt $\|a\|_q \le \|a\|_p$ und für alle $a \in$~~

Also für alle $a \in \ell^p$: (beachte $\left\|\frac{a}{\|a\|_p}\right\|_p = 1$)

$$\Rightarrow \left\|\frac{a}{\|a\|_p}\right\|_q = \frac{1}{\|a\|_p}\|a\|_q \le 1$$

$$\Rightarrow \|a\|_q \le \|a\|_p \quad \square$$

- $\ell^p \subsetneq \ell^q$ für $1 \le p < q < \infty$

Betrachte hierzu $a := (a_n) := \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$

$a \in \ell^q \setminus \ell^p$, denn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht konv.,

aber $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{q}{p}} < \infty$, da $\frac{q}{p} > 1$ nach Voraussetzung.

• $\ell^q \subset c_0$ für ~~p~~ $1 \le p < \infty$,

da notwendige Bed. für Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ ist, dass $|a_n|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, also

auch $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

• $\ell^q \subsetneq c_0$: Betrachte $a = (a_n) = \frac{1}{\log n}$

~~Wegen $\log n < n \ \forall\ n \ge 1$~~

~~gilt $\frac{1}{\log n} \ge \frac{1}{n}$, und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert~~

Wegen ~~$(\log n)^p \ge$~~ n^p ~~$< e^n$ für $n \ge 1$~~

$n > (\log n)^p \Leftrightarrow \sqrt[p]{n} > \log n$ $\qquad$ ~~$\Leftrightarrow e^{\log(n^p)} < e^n$~~

$\Leftrightarrow e^{\sqrt[p]{n}} > n$ $\qquad$ ~~$\Leftrightarrow e^{p \log(n)} < e^n$~~

$\Leftrightarrow e^{\sqrt[p]{n}} > (n^{\frac{1}{p}})^p$ $\qquad$ ~~$\Leftrightarrow e^{(\log n)^p} < e^n$~~

$\Rightarrow e^n > n$ $\qquad$ $\Leftrightarrow (\log n)^p < n$

gilt für $n \ge M_0$ $\qquad$ $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log n}\right)^p > \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

divergiert gilt $a \notin \ell^q$ für $1 \le q < \infty$,

Aber $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und damit $a \in c_0$

2 a)

Ziel: Zweifaches Anwenden von Hölder.

(1) Schreibe $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = 1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{s}$ für ein passendes s.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{s}=1 \Rightarrow s \overset{!}{=} \frac{rq}{r+q}$$

Bel.: $bc \in \ell^s$

$$\Leftrightarrow (|b_n c_n|^s) \in \ell^1$$

$$\Leftrightarrow \sum_n |b_n|^s |c_n|^s < \infty$$

Dies ist nach Hölder erfüllt, falls $(|b_n|^s) \in \ell^{q'}$,

$(|c_n|^s) \in \ell^{r'}$ mit $\frac{1}{q'}+\frac{1}{r'}=1$

$(|b_n|^s) \in \ell^{q'} \Leftrightarrow (|b_n|^{sq'}) \in \ell^1$ (*)

$(|c_n|^s) \in \ell^{r'} \Leftrightarrow (|c_n|^{sr'}) \in \ell^1$

Nach Voraussc. gilt $b \in \ell^q \Leftrightarrow (|b_n|^q) \in \ell^1$

$c \in \ell^r \Leftrightarrow (|c_n|^r) \in \ell^1$

Setze also $sq' \overset{!}{=} q \quad sr' \overset{!}{=} r$

$$\Rightarrow \frac{rq}{r+q} \cdot q' \overset{!}{=} q \qquad \frac{rq}{r+q} r' = r$$

$$\Leftrightarrow q' = \frac{r+q}{r}, \ r' = \frac{r+q}{q}$$

~~Nach~~ Also gilt $\frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = \frac{r+q}{r+q} = 1$

und daher die Voraussetzungen (*), also $bc \in \ell^s$

(2) $bc \in \ell^s$ nach Schritt (1), $a \in \ell^p$,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1$ nach Wahl von s

$$\overset{\text{Hölder}}{\Longrightarrow} \cancel{ab} \ abc = a(bc) \in \ell^1 \text{ mit}$$

$$\|abc\|_1 \leq \|a\|_p \|bc\|_s = \|a\|_p \left(\| |bc|^s \|_1 \right)^{\frac{1}{s}}$$

"Herausziehen von Exponenten"

$$\cancel{\leq \|a\| \left(\| (|y_n|^s) \|_{q'} \right)^{\frac{1}{s}} \|}$$

$$\leq \|a\|_p \left(\| (|b_n|^s) \|_{q'} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\| |c_n|^s \|_{r'} \right)^{\frac{1}{s}}$$

$$= \|a\|_p \left(\sum |b_n|^{sq'} \right)^{\frac{1}{sq'}} \left(\sum |c_n|^{sr'} \right)^{\frac{1}{r's}}$$

$$\overset{\substack{sq' = q \\ sr' = r}}{=} \|a\|_p \ \cancel{\|\ \|_q} \ \|b\|_q \ \|c\|_r$$

2b)

~~A~~ Sei $a \in \ell^1$. Nach Aufgabe 1 gilt $a \in \ell^p \ \forall \ p \geq 1$ (inkl. ∞)

Beh: $\lim\limits_{p \to \infty} \|a\|_p = \|a\|_\infty$

Bew: Betrachte

$$\log(\|a\|_p) = \log\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

o.B.d.A $\sup|a_n| \neq 0$

$$= \frac{1}{p} \log\left[(\sup|a_n|)^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n|}{\sup|a_n|}\right)^p\right)\right]$$

$$= \frac{p}{p} \log(\sup|a_n|) + \underbrace{\frac{1}{p} \log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_n|}{\sup|a_n|}\right)^p\right)}$$

$\frac{|a_n|}{\sup|a_n|} \leq 1$, log monoton

$$\leq$$

$$\underbrace{\log(\cancel{\sup|a_n|}) + \underbrace{\frac{1}{p} \log\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sup|a_n|}}_{< \infty \text{ nach Vor. } (a \in \ell^1)}\Big)}_{\xrightarrow{p \to \infty} 0}}$$

$$\xrightarrow[p \to \infty]{} \log(\sup|a_n|)$$

log ist stetig $\Rightarrow$ $\|a\|_p \longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \|a\|_\infty$

3)

~~siehe Werner~~

<u>Bemerkung:</u> $Y = C^b(\Omega)$ ist UVR von

$(\ell^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, d.h. den <u>beschränkten</u>

Fkt. auf Ω, versehen mit sup-Norm.

Es reicht also zu zeigen, dass Y abgeschlossen ist

d.h. glm. konv. Folgen von beschr. stetigen Fkt. konvergieren

~~wieder gegen~~ gegen stetige Funktionen (siehe Ana 1!)

Sei $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $(f_n) \subset Y$

<u>z.z.:</u> $f \in Y$

wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N$

Sei $x \in \Omega$.

~~für $x, y \in x, y$~~ Da f_N stetig $\underbrace{}_{\text{bei } x}$ ist, kann man

zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wählen, so dass

$$|f_N(x) - f_N(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \; |\underbrace{x-y}_{\in \Omega \subset \mathbb{R}^n}| < \delta$$

gilt:

Dann folgt

$$|f(x) - f(y)|$$

$$\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)|$$

$$\leq 2\,\|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(y)|$$

$$\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$ d.h. f ist stetig (bei x)

Mit $|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)|$

$$\leq \|f_N - f\|_\infty + \sup_{x \in \Omega} |f_N(x)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sup_{x \in \Omega} |f_N(x)| < \infty$$, also ist f beschr.