(noch: Beispiele linearer Abbildungen)

3) <u>Eine unstetige lineare Abbildung</u>

$$\underline{X} = (d, \|\cdot\|_\infty)$$

[d = Folgen mit nur endlich vielen von Null verschie-
denen Gliedern]

$A : \underline{X} \to \underline{X}$ $\qquad a = (a_j)_{j \in \mathbb{N}}, \; a_j \in \mathbb{K}$

$(Aa)_j = j\, a_j$

Matrixschreibweise: $A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & & & 0 & \\ & & 3 & & & \\ & & & 4 & & \\ & 0 & & & 5 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$a^{(\nu)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\nu \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow \nu\text{te Komponente}$$

$$A a^{(\nu)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow \text{——} \,\text{"}\, \text{——}$$

$$\|a^{(\nu)}\|_\infty = \frac{1}{\nu} \to 0 \quad (\nu \to \infty), \text{ d.h. } a^{(\nu)} \to 0$$

$$\|A a^{(\nu)}\|_\infty = 1 \Rightarrow A a^{(\nu)} \not\to 0 = A 0$$

Also A unstetig bei 0

Bem.: Die Unendlichdimensionalität von X war wesentlich.
Leicht z.z.: $\dim X < \infty$, $A: X \to X$ linear $\Rightarrow$ A stetig.

Def.: Seien $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$, $(\mathfrak{Y}, \|\cdot\|_{\mathfrak{Y}})$ normierte VR über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ od. $\mathbb{C}$.

$$L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := \{ T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y} \mid T \text{ stetig und linear} \}$$

$$\mathfrak{X}^* := L(\mathfrak{X}, \mathbb{K}) = \{ f : \mathfrak{X} \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig und linear} \}.$$

Die Elemente von $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ heißen stetige lineare <u>Operatoren</u>.
— " — $\mathfrak{X}^*$ — " — stetige lineare <u>Funktionale</u>,
$\mathfrak{X}^*$ heißt <u>Dualraum</u> von $\mathfrak{X}$.

[Daher der, etwas irreführende, Name "Funktionalanalysis" ...]

Offensichtliche Eigenschaften: (1) $L(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ (und $\mathfrak{X}^*$) sind $\mathbb{K}$-Vektorräume unter punktweiser Addition und punktweiser Skalarmultiplikation

$$(T+S)(x) = Tx + Sx$$
$$(\lambda T)(x) = \lambda Tx \qquad (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Falls $\underline{X} = \mathbb{R}^n$, $\underline{Y} = \mathbb{R}^m$:

$$L(\underline{X}, \underline{Y}) \cong M^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \,\middle|\, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

insbesondere $\dim L(\underline{X}, \underline{Y}) = m \cdot n$

Addition u. Skalarmult. in $L(\underline{X}, \underline{Y})$ = Addition u. Skalarmult. von Matrizen.

[d.h. $L(\underline{X}, \underline{Y})$ = Verallgemeinerung des Vektorraumes der $m \times n$ Matrizen aus der linearen Algebra]

(2) Falls $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$, ist die Verkettung $ST \in L(X, Z)$, wobei

$$(ST)(x) := S(T(x))$$

Für $\underline{X} = \mathbb{R}^n$, $\underline{Y} = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^k$: ST = Matrizenprodukt

$$(ST)_{i\ell} = \sum_{j=1}^{m} S_{ij} T_{j\ell}$$

Satz 3.1 (Eine natürliche Norm auf $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$)

Seien $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ normierte VR^e.

a) $$\|T\|_{L(\mathbb{X},\mathbb{Y})} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_{\mathbb{Y}}}{\|x\|_{\mathbb{X}}}$$
definiert eine Norm auf $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, die sog. Operatornorm.

b) Falls $\mathbb{Y}$ Banachraum, ist – unabh. von der Vollständigkeit von $\mathbb{X}$ – $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ versehen mit der Operatornorm ebenfalls Banachraum. Insbesondere ist der Dualraum $\mathbb{X}^*$ von $\mathbb{X}$, versehen mit der Norm
$$\|f\|_{\mathbb{X}^*} := \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$
Banachraum.

Absolutbetrag in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ od. $\mathbb{C}$

Beweis a) zunächst zu zeigen: $T \in L(\underline{X},\underline{Y}) \Rightarrow \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}} < \infty$.

Nach Lemma 3.1:

T stetig und linear $\Rightarrow \exists M \geq 0$: $\boxed{\|Tx\|_{\underline{Y}} \leq M \|x\|_{\underline{X}} \quad \forall x \in \underline{X}}$ (*)

$$\cdot \frac{1}{\|x\|_{\underline{X}}} \quad \Rightarrow \frac{\|Tx\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}} \leq M \quad -\!\!\text{//}\!\!-, \; x \neq 0$$

$$\Rightarrow \sup_{x\neq 0} -\!\!\text{//}\!\!- \leq M < \infty.$$

Insbesondere: $\|T\|_{L(\underline{X},\underline{Y})}$ ist die kleinste Konstante M sodaß (*) gilt.

Positivität: $\sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}} = 0 \Rightarrow \|Tx\|_{\underline{Y}} = 0 \quad \forall x \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow Tx = 0 \quad -\!\!\text{//}\!\!- \\ \text{Positiv. d. Norm auf } \underline{Y} \\ T\,0 = 0 \quad \text{wg. Linearität} \end{array}\right\} \Rightarrow T = 0.$$

Homogenität:

$$\|\lambda T\|_{L(\underline{X},\underline{Y})} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda T x\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}} = |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}}$$

$$= |\lambda| \, \|T\|_{L(\underline{X},\underline{Y})}$$

Dreiecksungl.:

$$\|T+S\|_{L(\underline{X},\underline{Y})} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx+Sx\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_{\underline{Y}} + \|Sx\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}}$$

$$= \sup_{x\neq 0} \left(\frac{\|Tx\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}} + \frac{\|Sx\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}} \right)$$

$$\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|Sx\|_{\underline{Y}}}{\|x\|_{\underline{X}}}$$

$$= \|T\|_{L(X,Y)} + \|S\|_{L(X,Y)}$$

[Wie Bew., dass $\|\cdot\|_\infty$ Norm auf $C^b(\Omega)$, einziger Unterschied: Faktor $\frac{1}{\|x\|}$]

b) Übungsaufgabe. Analog zu Bew., daß $(C^b(\Omega); \|\cdot\|_\infty)$ vollst.

Die Begriffe injektiv, surjektiv, invertierbar.

Motivation: ① Wann ist eine lineare Gl. $\boxed{Ax=b}$ lösbar?
② Wann ist die Lsg. eindeutig?

Lin. Alg.: $A = m \times n$ Matrix, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$
(klassisches lineares Gleichungssystem)

Funktionalanalysis: $x \in$ normiertem VR X, $b \in$ normiertem VR Y,
$A \in L(X, Y)$
Anwendungsbeispiele: siehe §1.

Funktionalanalytischer Standpkt: Betrachte Fragen ① & ② simultan für <u>alle</u> rechten Seiten b.

Def. Seien $\underline{X}, \underline{Y}$ normierte VR^e, $A \in L(\underline{X}, \underline{Y})$.

(i) $\operatorname{Ker} A := \{ x \in \underline{X} \mid Ax = 0 \} \subseteq \underline{X}$ Kern von A

(ii) $\operatorname{Ran} A := \{ Ax \mid x \in \underline{X} \} \subseteq \underline{Y}$ Bild von A

A heißt

<u>injektiv</u>, wenn $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

<u>surjektiv</u>, —"— $\operatorname{Ran} A = \underline{Y}$

<u>bijektiv</u> oder in<u>vertierbar</u>, wenn A inj. & surj.

Offensichtlich: A inj. $\Leftrightarrow$ die Gl. $Ax = b$ besitzt $\forall b \in \underline{Y}$ höchstens eine Lsg

A surj $\Leftrightarrow$ —"— mindestens —"—

⚠ Neuer Effekt im Unendlichdimensionalen: Für $A \in L(X, X)$ (d.h. Urbildraum = Bildraum) gilt im allgemeinen <u>nicht</u>:

injektiv $\Leftrightarrow$ surjektiv

[Vgl. $X = Y = \mathbb{R}^n$: $A \in L(X,X) \cong M^{n\times n}$ inj.
$\Leftrightarrow$ A surj.
$\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$]

<u>Bsp:</u> $X = \ell^2 = \{ (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid a_j \in \mathbb{K}, \left(\sum_j |a_j|^2\right)^{1/2} < \infty \}$

$S^+(a_1, a_2, a_3, \dots) := (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$

<u>Rechtsshiftoperator</u>

injektiv,
nicht surjektiv, da $(1,0,0,0,\dots) \notin \operatorname{Ran} S^+$

$S^-(a_1, a_2, a_3, \dots) := (a_2, a_3, a_4, \dots)$

<u>Linksshiftoperator</u>

nicht inj., da $S^-(1,0,0,0,\dots) = 0$
surj., da zu jedem $(b_1, b_2, b_3, \dots)$
$S^-(0, b_1, b_2, b_3, \dots) = (b_1, b_2, b_3, \dots)$.

Def. (Inverse von A) Falls $A \in L(\underline{X}, \underline{Y})$ invertierbar (d.h. inj. & surj.), heißt die Abbildung

$$b \mapsto \text{eind. Lsg von } Ax = b$$
$$\underline{Y} \longrightarrow \underline{X}$$

<u>Inverse</u> von A, Schreibweise: A^{-1}.

Leicht z.z.: $A^{-1} : \underline{Y} \to \underline{X}$ linear.

Nächste Stunde: Ist A^{-1} stetig, d.h. gilt $A^{-1} \in L(Y, \underline{X})$?

<u>Konvention:</u> Falls $A \in L(\underline{X}, \underline{Y})$, schreibt man oft (wenn aus dem Zshg. klar ist, welche Normen gemeint sind):

$\|x\|$	statt	$\|x\|_{\underline{X}}$
$\|Ax\|$	—"—	$\|Ax\|_{\underline{Y}}$
$\|A\|$	—"—	$\|A\|_{L(\underline{X}, \underline{Y})}$