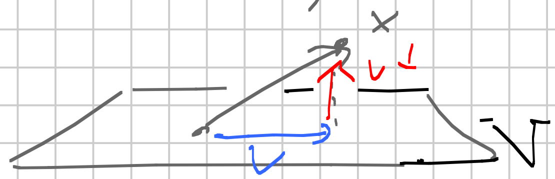
Beweis 2 von Satz 2.3. (Allgemeiner Fall.)



Eindeutigkeit:

Ann.: $x = v + v^{\perp} = v' + v'^{\perp}$

mit $v, v' \in V$, $v^{\perp}, v'^{\perp} \in V^{\perp}$

$$\Rightarrow \quad 0 = (v + v^{\perp}) - (v' + v'^{\perp})$$

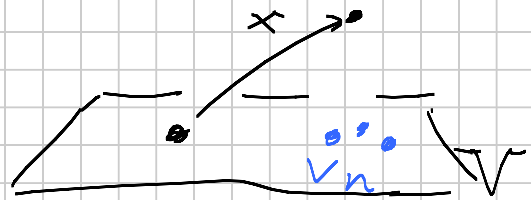
$$(*) \qquad = (v - v') + (v^{\perp} - v'^{\perp}) \qquad \Big|\ \langle v - v', \bullet \rangle$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \|v - v'\|^2 + \underbrace{\cancel{\langle \underbrace{v - v'}_{\in V}, \underbrace{v^{\perp} - v'^{\perp}}_{\in V^{\perp}} \rangle}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad v = v',$$

Einsetzen in (*), oder (alternativ) $\langle v^{\perp} - v'^{\perp}, \bullet \rangle$

$$\Rightarrow \quad v^{\perp} = v'^{\perp}.$$



Existenz: Idee: Konstruiere v via Abstandsminimierung.

$$d := \inf_{\tilde{v} \in \bar{V}} \|x - \tilde{v}\|$$

Beh.: $\exists\, v \in \bar{V}$: $\quad d = \|x - v\|$.

Bew.: Wähle Minimalfolge $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. $v_n \in \bar{V}$,
$\|x - v_n\| \longrightarrow d \quad (n \to \infty)$.

Schwierigkeit: Zeigen, daß $\{v_n\}$ konvergent.

[Reicht z.z.: $\{v_n\}$ Cauchyfolge, also betrachte Differenzen $v_n - v_m$.]

Trick: Benutze Parallelogrammgleichung mit
$$a = x - \frac{v_m + v_n}{2}, \quad b = \frac{v_m - v_n}{2}$$

$$\underbrace{\left\|x - \frac{v_m + v_n}{2}\right\|^2}_{\geq d^2, \text{ da } \frac{v_m + v_n}{2} \in \bar{V}} + \left\|\frac{v_m - v_n}{2}\right\|^2 = \underbrace{\frac{\|x - v_m\|^2 + \|x - v_m\|^2}{2}}_{\to d^2 \quad (\min\{m,n\} \to \infty).}$$

Also $\left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 \to 0$ $\quad (\min\{m,n\} \to \infty)$, d.h.
$\{v_n\}$ Cauchyfolge.

$\bar{X}$ Hilbertraum, also (per Def.) vollständig $\Rightarrow$ $\{v_n\}$ konvergent, dh $\exists\, v \in \bar{V}$: $v_n \to v$.

$\bar{V}$ (nach Vor.) abgeschlossen $\Rightarrow$ $v \in \bar{V}$.

$$\begin{aligned}
\| x - v \| &= \| x - \lim_{n\to\infty} v_n \| \\
&= \| \lim_{n\to\infty} (x - v_n) \| && (\text{Stetigkeit von } + \text{ und } \lambda\cdot \text{ in } \bar{X}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \| x - v_n \| && (\text{Stetigkeit der Norm}) \\
&= d && (\text{nach Wahl der } \{v_n\}).
\end{aligned}$$

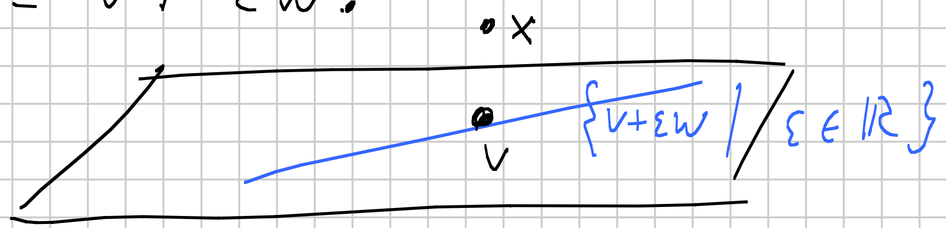
Noch z.z.: $\quad x - v \in \bar{V}^{\perp}$

(dann folgt $\quad x = v + v'$ mit $v \in \bar{V}$, $v' = x - v \in \bar{V}^{\perp}$).

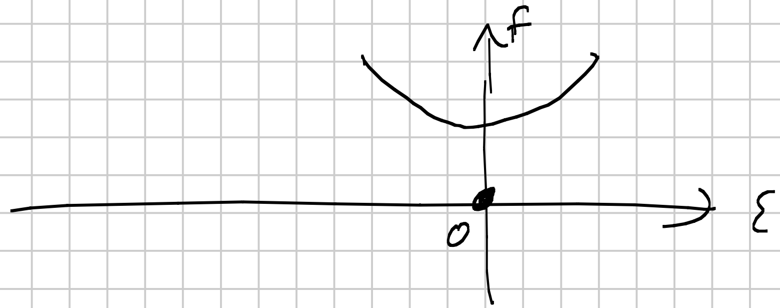
Idee: 

x_0 Minimumstelle von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Wir wissen: v minimiert $\|x - \tilde{w}\|^2$ unter allen $\tilde{w} \in \bar{V}$. Fixiere $w \in \bar{V}$, und betrachte $\tilde{w} = v + \varepsilon w$.



$f(\varepsilon) := \|x - (v + \varepsilon w)\|^2$ minimal für $\varepsilon = 0$



$\Rightarrow 0 = f'(0)$ ($\rightsquigarrow$ Analysis 1)

Berechnen von $f'(0)$:

$$f(\varepsilon) = \langle x - (v + \varepsilon w), x - (v + \varepsilon w) \rangle$$
$$= \langle (x - v) - \varepsilon w, (x - v) - \varepsilon w \rangle$$

$$= \langle x-v, x-v\rangle - \varepsilon\langle w, x-v\rangle - \varepsilon\langle x-v, w\rangle + \varepsilon^2\langle w,w\rangle$$

$$= \underbrace{\|x-v\|^2}_{\in \mathbb{R}} - 2\varepsilon\, \underbrace{\mathrm{Re}\langle w, x-v\rangle}_{\in\mathbb{R}} + \varepsilon^2 \underbrace{\|w\|^2}_{\in\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow f'(\varepsilon) = -2\,\mathrm{Re}\langle w, x-v\rangle + 2\varepsilon\|w\|^2$$

$$\Rightarrow 0 = f'(0) = -2\,\mathrm{Re}\langle w, x-v\rangle, \quad \forall w \in \overline{V} \qquad (*)$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \langle w, x-v\rangle = 0 \quad \forall w \in \overline{V}$ dh. $x - v \in \overline{V}^\perp$

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow$ wende $(*)$ an mit $\frac{1}{i}w$ statt w

$$\Rightarrow 0 = -2\,\mathrm{Re}\left(\left\langle \tfrac{1}{i}w, x-v\right\rangle\right) \quad \forall w \in \overline{V}$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{i}\langle w, x-v\rangle\right) = -2\,\mathrm{Im}\langle w, x-v\rangle \qquad (**)$$

Nebenrechnung: $z = a + ib \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{i}z\right) = \mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{i}a + b\right) = \mathrm{Re}(b - ia) = b$$
$$= \mathrm{Im}(z)$$

$(*), (**) \Rightarrow \langle w, x-v\rangle = 0 \quad \forall w \in \overline{V}$ dh. $x - v \in \overline{V}^\perp$.

Bem: Bew. ist ein "Muster" für Existenzbeweise für Gleichungen $Ax = b$, $x \in$ Hilbertraum.

Korollar 2.1 (Existenz von Orthonormalbasen)
Sei X Hilbertraum, $\dim X < \infty$. Dann $\exists$ eine Orthonormalbasis von X, d.h. eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von X mit $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.

Bew.: Wähle $\tilde{v}_1 \in X \setminus \{0\}$.

$$v_1 := \frac{\tilde{v}_1}{\|\tilde{v}_1\|} \text{ erfüllt } \|v_1\| = 1$$

Projektionssatz (Satz 2.3) $\Rightarrow \forall x \in X \; \exists \; \alpha \in \mathbb{K}$, $\hat{v} \in \{\operatorname{Span} v_1\}^\perp$ mit $x = \alpha v_1 + \hat{v}$

wobei
$$\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_k\} := \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j \;/\; \alpha_j \in \mathbb{K} \right\}.$$

$\dim X = 1 \Rightarrow$ Korollar bewiesen.

$\dim \underline{X} > 1 \Rightarrow \{\operatorname{Span} v_1\}^{\perp} \neq \{0\}$

$\Rightarrow$ Wähle $\tilde{v}_2 \in \{\operatorname{Span} v_1\}^{\perp} \setminus \{0\}$

$v_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|}$ erfüllt $\|v_2\| = 1$, $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

$\Rightarrow \forall x \in V \; \exists \; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \; \tilde{w} \in \{\operatorname{Span}\{v_1, v_2\}\}^{\perp}$ mit

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \tilde{w}$$

Iterieren $\Rightarrow$ Beh.

§3 Funktionale und Operatoren

Seien $(\underline{X}, \|\cdot\|)$ normierte Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
$(\underline{Y}, \|\cdot\|_*)$

__Def. 3.1__ Eine Abbildung $T : \underline{X} \to \underline{Y}$ heißt __linear__, wenn

$$T(\alpha x + \alpha' x') = \alpha T(x) + \alpha' T(x')$$

$\forall x, x' \in \underline{X}$, $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. Eine Abb. $T : \underline{X} \to \underline{Y}$ heißt __stetig__, wenn gilt:

$$\text{Aus } \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n = x}_{\text{d.h. } \|x_n - x\| \to 0} \text{ folgt } \underbrace{\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)}_{\text{d.h. } \|T(x_n) - T(x)\|_* \to 0}.$$

Lemma 3.1 Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|_*)$ normierte Vektorräume, $T: X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) T ist stetig

(ii) $\exists\, M \geq 0$ sodaß $\|T(x)\|_* \leq M \|x\| \quad \forall x \in X$.

Schreibweise: Tx statt $T(x)$, falls T linear.

Bew: (ii) $\Rightarrow$ (i):

$x_n \to x \Rightarrow \|x_n - x\| \to 0$

$\Rightarrow \|Tx_n - Tx\| \underset{T \text{ linear}}{=} \|T(x_n - x)\| \underset{(ii)}{\leq} M \|x_n - x\| \to 0$

d.h. $Tx_n \to Tx$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): (indirekt) Angenommen $\nexists\, M \geq 0$ sodaß

$\|Tx\|_* \leq M \|x\| \quad \forall x \in X$.

Dann $\exists\, x_n \in X$: $\|Tx_n\|_* \geq n \|x_n\| \quad \forall n$

Setze $y_n := \dfrac{x_n}{n\|x_n\|} \Rightarrow \|y_n\| = \dfrac{1}{n} \to 0 \Rightarrow y_n \to 0$

Aber $\|Ty_n\|_* = \dfrac{\|Tx_n\|_*}{n\|x_n\|} \geq 1 \quad \forall n$, d.h. $Ty_n \not\to T0 = 0$.

Also T unstetig, ↯.

Beispiele stetiger linearer Operatoren:

1) Integrieren

$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = C([a,b])$

$(Tf)(x) = \int_a^x f(s)\,ds$ (d.h. Tf = Stammfkt. von f)

$T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ linear: ✓

$T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ stetig:

$\|Tf\| = \sup_{x\in[a,b]} |(Tf)(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x f(s)\,ds\right|$

$$\leq \int_a^b \sup_{s\in[a,b]} |f(s)| \, ds$$

$$= (b-a) \, \|f\| \quad ✓$$

2) <u>Ableiten</u>

$X = C^1([a,b])$ stetig diff'bare Fkt'en auf $[a,b]$

$$\|f\|_{C^1} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

$$Y = C([a,b])$$

$$\|f\|_C = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

$$(Tf)(x) = f'(x)$$

$T : X \to Y$

T linear ✓ (Ableiten ist linear)

T stetig: $\|Tf\|_C = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \leq \|f\|_{C^1}$ ✓