Z.z.: $B(x,y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ ist ein inneres Produkt.

<u>Beh. 1:</u> (Additivität i.d. 1. Variablen)

$$B(x+x', y) = B(x,y) + B(x',y)$$

d.h. $\|(x+x')+y\|^2 - \|(x+x')-y\|^2$

$$= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x'+y\|^2 - \|x'-y\|^2$$

<u>Bew.:</u> (a) $\|(x+x')+y\|^2 = \|(x+y)+x'\|^2$

$$\overset{\text{Parall.id}}{=} 2\|x+y\|^2 + 2\|x'\|^2 - \|x+y-x'\|^2$$

$$\overset{\substack{\text{Parall.id} \\ x \leftrightarrow x'}}{=} 2\|x'+y\|^2 + 2\|x\|^2 - \|x'+y-x\|^2$$

$$\overset{\substack{\text{Mittelwert der} \\ \text{beiden vorherigen Ausdrücke}}}{=} \|x+y\|^2 + \cancel{\|x'\|^2} - \frac{1}{2}\|x+y-x'\|^2 + \|x'+y\|^2 + \cancel{\|x\|^2} - \frac{1}{2}\cancel{\|-x+y+x'\|^2}$$

Analog: ($-y$ statt y)

(b) $\|(x-y)+x'\|^2 = \|x-y\|^2 + \cancel{\|x'\|^2} - \cancel{\tfrac{1}{2}\|x-y-x'\|^2}$
$+ \|x'-y\|^2 + \cancel{\|x\|^2} - \cancel{\tfrac{1}{2}\|-x-y+x'\|^2}$

(a)−(b): $\|x+y+x'\|^2 - \|x-y+x'\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x'+y\|^2$
$- \|x-y\|^2 - \|x'-y\|^2$ ✓

Beh. 2 $\quad B(\lambda x, y) = \lambda B(x,y) \quad \forall x,y \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$

(nachweis nur: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.)

Idee: Für $\lambda \in \mathbb{Q}$: Benutze Beh. 1
Für $\lambda \in \mathbb{R}$: Approximiere durch $\lambda_j \in \mathbb{Q}$

$\lambda \in \mathbb{Q}$: $\quad \lambda = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$B\left(\frac{m}{n}x, y\right) = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot n}_{=1} \ B\left(\frac{m}{n}x, y\right)$$

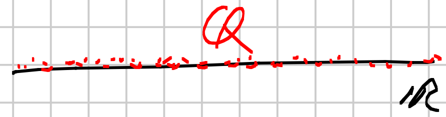
$$= \frac{1}{n}\Big(\underbrace{B\left(\tfrac{m}{n}x, y\right) + \dots + B\left(\tfrac{m}{n}x, y\right)}_{n\text{-mal}}\Big)$$

$$\overset{\text{Beh. 1}}{\underset{\text{Additivität}}{=}} \frac{1}{n} \ B\Big(\underbrace{\tfrac{m}{n}x + \dots + \tfrac{m}{n}x}_{n\text{-mal}}, y\Big)$$

$$= \frac{1}{n} \, B(\underbrace{mx}_{= \underbrace{x + \dots + x}_{m\text{-mal}}}, y)$$

$$\underset{\substack{\text{Bed. 1} \\ \text{Additivität}}}{=} \frac{m}{n} \, B(x, y)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$: Wähle $\lambda_j \to \lambda$, $\lambda_j \in \mathbb{Q}$



$$\begin{tikzcd}
B(\lambda_j x, y) \arrow[d, "\substack{B \text{ stetig, da} \\ \|\cdot\| \text{ stetig,} \\ \lambda \mapsto \lambda x \text{ st.}}"'] \arrow[r, phantom, "="] & \lambda_j B(x, y) \arrow[d, "j \to \infty"] \\
B(\lambda x, y) & \lambda \, B(x, y)
\end{tikzcd}$$

Bed. 1 & 2 $\Rightarrow$ B linear in der 1. Variablen.

Symmetrie $(B(x,y) = B(y,x))$: Klar aus Def.

Positivität: Folgt aus der (schon bewiesenen) Identität

$$B(x, x) = \|x\|^2$$

und der Positivität von $\|\cdot\|$.

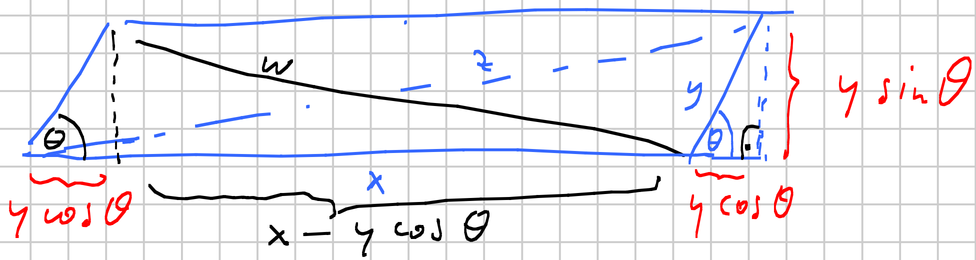
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Analog, mit

$$B(x,y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right)$$

Siehe Lösungen.

Erklärung des Namens "Parallelogrammidentität".

$\mathbb{R}^2$



$x = |\vec{x}|$

$y = |\vec{y}|$

$z = |\vec{x} + \vec{y}|$

$w = |\vec{x} - \vec{y}|$

$$(x + y\cos\theta)^2 + (y\sin\theta)^2 = z^2$$

$$(x - y\cos\theta)^2 + (y\sin\theta)^2 = w^2$$

(+)

$$x^2 + \cancel{2xy\cos\theta} + y^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta$$
$$+ x^2 - \cancel{2xy\cos\theta} + y^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta = z^2 + w^2$$

$\Leftrightarrow$

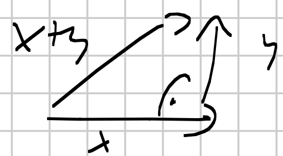
$\cos^2 + \sin^2 = 1$

$$2x^2 + 2y^2 = z^2 + w^2.$$

Def. Sei X ein Hilbertraum. Zwei Elemente $x, y \in X$ heißen <u>orthogonal</u>, wenn $\langle x, y\rangle = 0$.
Das <u>orthogonale Komplement</u> einer Teilmenge $V \subseteq X$ ist definiert als

$$\{ y \in X \mid \langle y, v\rangle = 0 \ \forall v \in V \} =: V^{\perp}.$$

<u>Offensichtliche Eigenschaften:</u>



- x und y orthogonal $\Rightarrow$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{(Satz d. Pythagoras)},$$

denn

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{= \overline{\langle x,y\rangle} = 0} + \langle y,y\rangle$$

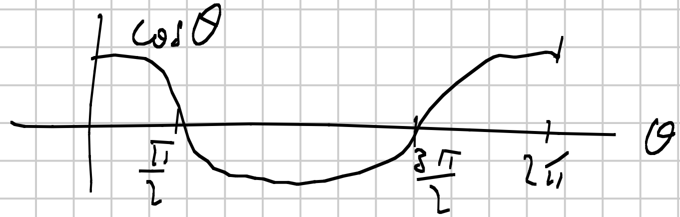
- $V^{\perp}$ ist abgeschlossener Unterraum von X

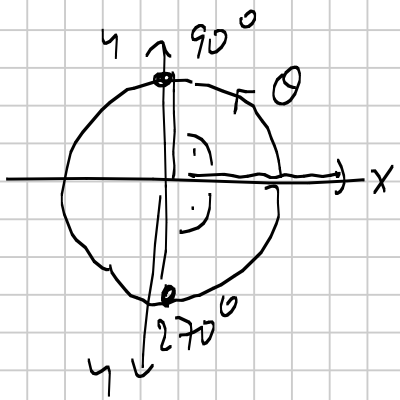
denn $\langle \lambda y + \lambda' y', v\rangle = \lambda \langle y, v\rangle + \lambda' \langle y', v\rangle$,
d.h. $y, y' \in V^{\perp} \Rightarrow \lambda y + \lambda' y' \in V^{\perp}$.

- Im $\mathbb{R}^2$ gilt: $\quad (x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$

$$\cos\theta = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \qquad (x, y \neq 0)$$

d.h. $x \cdot y = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$





$\iff$ x, y stehen senkrecht aufeinander

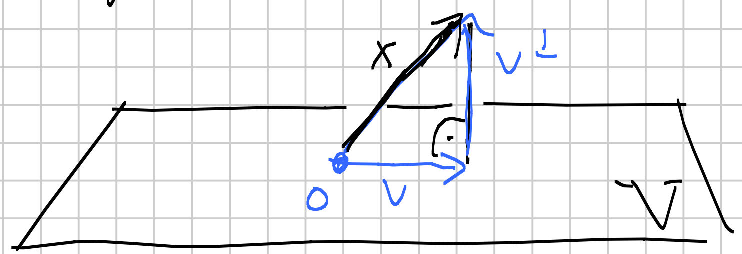
Satz 2.3 (Projektionssatz) Sei $\mathfrak{X}$ Hilbertraum, $V \subseteq \mathfrak{X}$ ein abg. UR. Für jedes $x \in \mathfrak{X}$ existieren eindeutige Elemente $v \in V$, $v^\perp \in V^\perp$ sodass

$$x = v + v^\perp.$$

Der Punkt v ist der Punkt in V mit minimalem Abstand zu x, d.h.

$$\|x-v\| \leq \|x-v'\| \quad \forall v' \in V, \text{ „}=\text{“} \Leftrightarrow v' = v.$$

Anschauung im $\mathbb{R}^3$:



Beweis 1 Zwei Zusatzannahmen:

1. $\dim V < \infty$ (aber X darf $\dim = \infty$ haben)

2. $\exists$ orthonormale Basis von V, d.h. eine Basis $\{v_1, \dots, v_N\}$ sodaß $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.
[Kann zeigen sich in jedem V mit $\dim V < \infty$]

Beh.: Die beiden Vektoren

$$v := \sum_{i=1}^{N} \langle x, v_i \rangle v_i$$

$$v^{\perp} := x - \sum_{i=1}^{N} \langle x, v_i \rangle v_i$$

erfüllen die Behauptungen in Theorem 2, 3:

$x = v + v^{\perp}$ ✓

$v \in V$ ✓ da v Lin.komb. von Vektoren aus V

$v^{\perp} \in V^{\perp}$:

z.z.: $y \in V$ beliebig, d.h. $y = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j v_j$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow \langle v^{\perp}, y \rangle = 0$

Nachrechnen:

$$\langle v^{\perp}, y \rangle \underset{\text{Def. von } v^{\perp}}{=} \left\langle x - \sum_{i=1}^{N} \langle x, v_i \rangle v_i , \sum_{j=1}^{N} \alpha_j v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \overline{\alpha_j} \left\langle x - \sum_{i=1}^{N} \langle x, v_i \rangle v_i , \; v_j \right\rangle$$

"Ausmulti-plizieren" (konj. Lin. 2. Var.)

$$= \sum_{j=1}^{N} \overline{\alpha_j} \left(\langle x, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{N} \langle x, v_i \rangle \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \right)$$

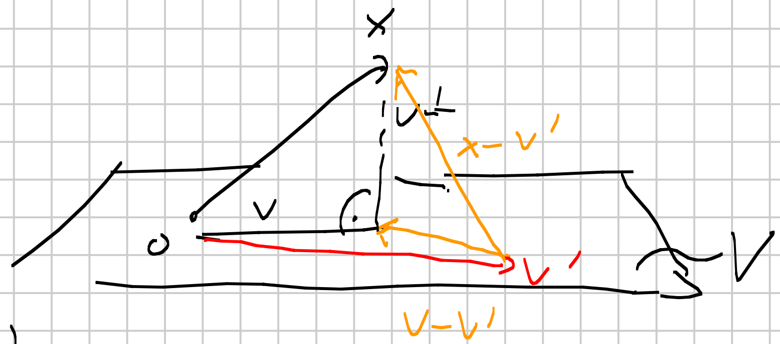
"Ausmultipliz." (Lin. 1. Var.)

$$= \sum_{j=1}^{N} \overline{\alpha_j} \left(\underbrace{\langle x, v_j \rangle - \langle x, v_j \rangle}_{=0} \right)$$

$$= 0 .$$

Minimale Abstandseigenschaft:

Sei $v' \in V$.



$$x - v' = \underbrace{(x-v)}_{\in V^\perp} + \underbrace{(v-v')}_{\in V}$$

$\overset{\text{Pythagoras}}{\Rightarrow}$ $\|x-v'\|^2 = \|x-v\|^2 + \underbrace{\|v-v'\|^2}_{\geq 0, \; = 0 \text{ g.d.w. } v'=v}$

Also $\|x-v'\| \geq \|x-v\|$, "=" g.d.w. $v'=v$.