§2 Hilberträume

Hilberträume sind eine spezielle Klasse von Banachräumen.

<u>Def 2.1</u> Sei X ein VR über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Ein <u>inneres Produkt</u> auf X ist eine Abbildung

$$B : X \times X \to \mathbb{K}$$

sodaß für alle $x, y, z \in X$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

(i) (Linearität in der ersten Variablen)

$$B(\lambda x + \mu y, z) = \lambda B(x, z) + \mu B(y, z)$$

(ii) (Symmetrie)

$$B(x, y) = \overline{B(y, x)}, \quad \overline{(\ )} = \text{komplexe Konjugation}$$

(iii) (Positivität)

$B(x,x) \geq 0$, „=" genau dann wenn $x = 0$.

[offensichtliche Konsequenzen aus (i) & (ii):

- $B(z, \lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} B(z,x) + \bar{\mu} B(y,x)$
  (konjugierte Linearität i.d. 2ten Variablen)
- $B(x,x) \in \mathbb{R}$]

Schreibweise: $B(x,y) =: \langle x, y \rangle$

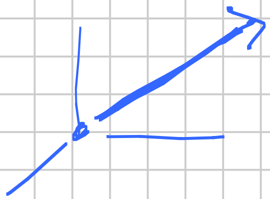
<u>Def. 2.2</u> Ein Hilbertraum ist ein Banachraum $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$, sodaß ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{X}$ existiert mit der Eigenschaft

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

<u>Beispiele</u> 1) $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,

$$\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$ euklidische Norm (geometrische Länge)



$x \in \mathbb{R}^3$

2) $X = \mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

Symmetrie: $\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i} \underset{\overline{\overline{z}} = z}{\overset{\uparrow}{=}} \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{y_i} x_i} = \overline{\langle x, y \rangle}$ ✓

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}} \overset{\uparrow}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$ euklidische Norm auf $\mathbb{C}^n$

$z\overline{z} = |z|^2$, da $(a+ib)(a-ib) = a^2 + \cancel{iab} - \cancel{iab} + \underbrace{i(-i)}_{1} b^2 = a^2 + b^2$

3) $X = \ell^2 = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

[Werden sehen: ℓ^p, $p \neq 2$, kein Hilbertraum]

4) $X = L^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ meßbar

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_\Omega \tilde{f}(x)\, \overline{\tilde{g}(x)}\, dx, \quad \tilde{f} \in [f], \tilde{g} \in [g]$$

(d.h. $\tilde{f}, \tilde{g} : \Omega \to \mathbb{K}$ meßbar, $\int_\Omega |\tilde{f}|^2, |\tilde{g}|^2 < \infty$, $\tilde{f} = f$, $\tilde{g} = g$ f.ü.)

$$\langle [g], [f] \rangle = \int_\Omega \tilde{g}\, \overline{\tilde{f}} = \overline{\int_\Omega \overline{\tilde{g}}\, \tilde{f}} = \overline{\langle [f], [g] \rangle}$$

$$\|[f]\|_2 = \sqrt{\langle [f], [f] \rangle} = \sqrt{\int_\Omega |\tilde{f}|^2}$$

[Werden zeigen: $L^p(\Omega)$, $p \neq 2$, kein Hilbertraum]

Satz 2.1 Sei $\mathbb{X}$ ein beliebiger $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ ein inneres Produkt auf $\mathbb{X}$.
Dann ist
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$
eine Norm auf $\mathbb{X}$.

Bew.: z.z.: (i) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungl.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ $\quad x \in \mathbb{X}, \lambda \in \mathbb{K}$

(iii) $\|x\| \geq 0$, „$=$" g.d.w. $x = 0$.

(iii): Folgt aus Positivität des inneren Produkts, d.h.
$$\langle x, x\rangle \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0$$
$$\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 0$$

(ii): $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle$

$$= \lambda \langle x, \lambda x \rangle$$
$$= \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2$$

(i) benötigt

<u>Lemma 2.1</u> (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Sei X VR mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann gilt:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

<u>Bem.:</u> Für ℓ^2 ergibt sich

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \bar{y}_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2}$$

(Hölder'sche Ungleichung für Folgen mit $p=2$).

Für $L^2(\Omega)$ ergibt sich

$$\left| \int_\Omega \tilde{f} \, \bar{\tilde{g}} \right| \leq \sqrt{\int_\Omega |\tilde{f}|^2} \sqrt{\int_\Omega |\tilde{g}|^2}$$

(Hölder'sche Ungl. für Funktionen mit $p=2$).

__Bew.:__ OBdA $x, y \neq 0$ (andernfalls linke Seite $=$ 0 $=$ rechte Seite). Setze $\alpha := \frac{\|x\|}{\|y\|}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (zunächst beliebig), und betrachte

$$x - \alpha e^{i\theta} y.$$

$$0 \underset{\substack{\text{Positivität}\\ \text{von } \langle\cdot,\cdot\rangle}}{\leq} \langle x - \alpha e^{i\theta} y, x - \alpha e^{i\theta} y \rangle$$

$$\underset{\substack{\text{Linearität}\\ \text{in 1. Var.}}}{=} \langle x, x - \alpha e^{i\theta} y \rangle - \alpha e^{i\theta} \langle y, x - \alpha e^{i\theta} y \rangle$$

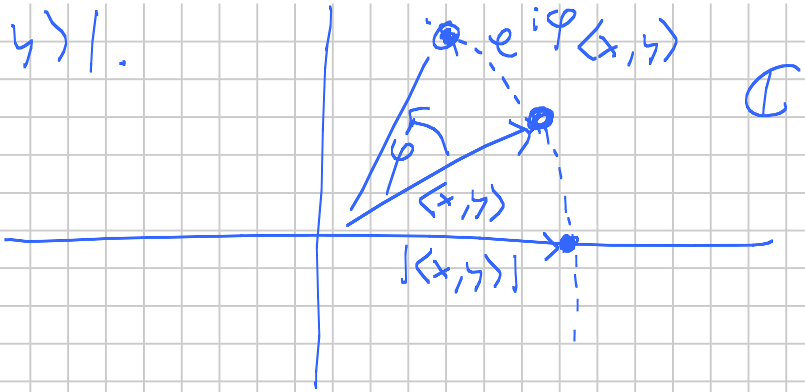
$$\underset{\substack{\text{Linearität bis auf}\\ \text{Konjugation in}\\ \text{2. Var.}}}{=} \langle x, x \rangle - \alpha e^{-i\theta} \langle x, y \rangle - \underbrace{\alpha e^{i\theta} \langle y, x \rangle}_{= \overline{\alpha e^{-i\theta} \langle x, y \rangle}} + \alpha^2 \|y\|^2$$

$$= \langle x, x \rangle - 2 \operatorname{Re} \alpha e^{-i\theta} \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 - 2\alpha \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} \langle x, y \rangle\right) + \alpha^2 \|y\|^2.$$

Dies gilt $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Wähle θ sodaß $\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} \langle x, y \rangle\right)$

$$= |\langle x,y\rangle|.$$



$$\Rightarrow \quad 0 \le \|x\|^2 - 2\alpha\,|\langle x,y\rangle| + \alpha^2\|y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{2}\,\frac{\cancel{\|x\|}}{\|y\|}\,|\langle x,y\rangle| \le \|x\|^2 + \frac{\|x\|^2}{\cancel{\|y\|^2}}\,\cancel{\|y\|^2} = \cancel{2}\,\|x\|^{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\|y\|}\,|\langle x,y\rangle| \le \|x\|$$

$$\Leftrightarrow \quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|.$$

Wie kommt man auf die Wahl von α & $e^{i\theta}$?

Antwort: $\quad 0 \le \langle x-\lambda y,\, x-\lambda y\rangle \quad \forall \lambda\in\mathbb{C}$

Wähle λ sodaß rechte Seite minimal. Lösen dieses Minimum-problems für $\lambda \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \lambda$ wie oben.

Beweis von Satz 2.1 (i) (Dreiecksungl.)

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$\underset{\text{CSU}}{\leq} \underbrace{\langle x,x\rangle}_{=\|x\|^2} + 2\|x\|\|y\| + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{=\|y\|^2}$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

$=$

Lemma 2.2 Sei X ein Hilbertraum mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Das innere Produkt ist <u>stetig</u>, d.h. wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$, dann gilt
$$\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x,y\rangle.$$

<u>Bew.:</u>
$$|\langle x,y\rangle - \langle x_n,y_n\rangle| = |\langle x-x_n, y\rangle + \langle x_n, y-y_n\rangle|$$
$$\leq |\langle x-x_n,y\rangle| + |\langle x_n, y-y_n\rangle|$$
$$\underset{\text{CSU}}{\leq} \|x-x_n\|\,\|y\| + \|x_n\|\,\|y-y_n\|$$

$\to 0$ $\qquad\qquad$ $\to \|x\|$, da Norm stetig (§1) $\qquad\qquad$ $\to 0$

$\to 0 \quad (n \to \infty)$.

Satz 2.2 Sei X ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$. X ist Hilbertraum (d.h. $\exists$ stetiges inneres Produkt auf X mit $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$) genau dann, wenn die Norm die Parallelogrammidentität

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \forall x,y \in X$$

erfüllt.

Bsp: $C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig} \}$ mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ ist kein Hilbertraum, denn

$\uparrow$

$$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|f+g\|_\infty = \|f-g\|_\infty = 1$$

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 1 \cdot \left(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2\right)$$

<u>Bew.</u> (Hilbertraum $\Rightarrow$ Norm erfüllt Parallelogrammid.)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle$$

$\|z\| = \langle z, z\rangle$
für ein i.p. $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$$= \langle x,x\rangle + \cancel{\langle x,y\rangle} + \cancel{\langle y,x\rangle} + \langle y,y\rangle$$
$$+ \langle x,x\rangle - \cancel{\langle x,y\rangle} - \cancel{\langle y,x\rangle} + \langle y,y\rangle$$
$$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

<u>Bew.</u> (Norm erfüllt Parallelogrammid. $\Rightarrow$ Hilbertraum), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Definiere $B(x,y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

Nachprüfen: $B(x,x) = \frac{1}{4}\left(\|2x\|^2 - \|0\|^2\right) = \frac{1}{4}\cdot 4\,\|x\|^2$

$\Rightarrow \sqrt{B(x,x)} = \|x\|$ ✓

Linearität in 1. Variable:

<u>Bed. 1:</u> $B(x+x', y) = B(x,y) + B(x',y)$

Beweis: z.z.:

$$\|(x+x')+y\|^2 - \|(x+x')-y\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|x'+y\|^2 - \|x'-y\|^2$$

Folgt aus Parallelogrammgl., nach einiger Rechnung ..