Def. Sei V Vektorraum. V heißt <u>endlich-dimensional</u>, wenn eine endliche Menge $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ existiert sodass

(*) $$V = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{K} \right\}.$$

In diesem Fall heißt das minimale solche n <u>Dimension</u> von V ($\dim V$). Andernfalls heißt V <u>unendlich-dimensional</u> (Schreibweise: $\dim V = \infty$).

Satz 1.5 Sei X Banachraum. Dann sind äquivalent:

(i) $\dim X < \infty$

(ii) Jede beschränkte Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bem.: 1) Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist also in jedem ∞-dim. Banachraum falsch.

2) Aber in der F.A. oft wichtig, Konvergenz einer Folge zu zeigen (z.B.: Folge von Approximationslösungen für

eine Gleichung $Ax = b$.) Die Tatsache, daß Beschränktheit hierfür nicht ausreicht, motiviert die Suche nach "Ersatzkriterien". ($\approx \frac{1}{4}$ der Geschichte der F.A.; siehe spätere Kapitel der VL)

Der Beweis benötigt einige Vorbereitung.

<u>Def.</u> (Äquivalenz von Normen) Sei X ein Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ auf X heißen <u>äquivalent</u>, wenn $m>0$, $M>0$ existieren sodaß

$$m\,\|x\| \leq |||x||| \leq M\,\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

<u>Folgerung</u>: $(X, \|\cdot\|)$ und $(X, |||\cdot|||)$ besitzen dieselben Cauchyfolgen, dieselben konv. Folgen, dieselben abg. bzw. offenen Mengen.

<u>Bsp</u>: Maximumsnorm $\|x\|_1 = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ und euklidische Norm $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$ auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\max\{|x_1|,|x_2|\} &= \sqrt{\max\{|x_1|^2, |x_2|^2\}} \\ &\leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \\ &\leq \sqrt{2\max\{|x_1|^2, |x_2|^2\}} \\ &= \sqrt{2}\max\{|x_1|,|x_2|\}\end{aligned}$$

<u>Lemma 1.4</u> Sei X ein endlich-dimensionaler VR. Alle Normen auf X sind äquivalent.

<u>Bew:</u> Sei $\|\cdot\|$ Norm auf X.
Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von X, d.h. $\forall v \in X\ \exists v_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, sodass

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

Definiere $\|v\|_2 := \sqrt{|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2}$

(neue Norm auf $\underline{X}$).

__Beh. 1:__ $\exists M > 0: \quad \|v\| \le M \|v\|_2$.

__Bew:__
$$\|v\| = \Big\| \sum_{i=1}^n v_i e_i \Big\| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\le} \sum_{i=1}^n \|v_i e_i\| \underset{\text{Homogenität}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{|v_i|}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\|e_i\|}_{\in \mathbb{R}}$$
$$\underset{\substack{\text{Hölder'sche Ungl. für} \\ \text{Folgen mit } p=q=2}}{\le} \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \Big)^{1/2}}_{= \|v\|_2} \cdot \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \Big)^{1/2}}_{=: M}$$

__Beh. 2:__ $\exists m > 0: \quad m \|v\|_2 \le \|v\|$.

Idee: Versuche zu zeigen, daß die Funktion $\frac{\|v\|}{\|v\|_2} \ge m > 0$ ist für alle $v \in V \setminus \{0\}$.

Wg. Beh. 1 ist $\|v\|$ stetig bzgl. $\|\cdot\|_2$; trivialerweise ist $\{v \in V \mid \|v\|_2 = 1\}$ abgeschlossen und beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_2$.

Nach einem Satz aus der Analysis nehmen stetige Fkt'en auf abgeschlossenen beschränkten Mengen im $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ihr Minimum an.

Also $\exists v_* \in V$ mit $\|v_*\|_2 = 1$, $\|v\| \geq \|v_*\| =: m > 0$ für alle $v \in V$ mit $\|v\|_2 = 1$.

Also $m\|v\|_2 \leq \left\| \frac{v}{\|v\|_2} \right\| \|v\|_2 = \|v\| \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$.

dieser Vektor hat $\|\cdot\|_2$-Norm 1

$\square$

Korollar 1.3 X normierter VR, $\mathcal{U} \subseteq X$ endlich dim. VR $\Rightarrow \mathcal{U}$ abgeschlossen.

Bew: Wähle Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von $\mathcal{U}$

d.h. $\forall v \in \mathcal{U}: v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \quad , v_j \in \mathbb{K}$

Neue Norm: $\|v\|_2 := \sqrt{\sum_i |v_i|^2}$

Lemma 1.4 $\Rightarrow \exists m, M > 0$:

$$(*) \qquad m \|v\| \leq \sqrt{\sum_i |v_i|^2} \leq M \|v\|$$

Sei $v^{(j)}$ Folge in $\mathcal{U}$, $v^{(j)} \to v$ d.h. $\|v^{(j)} - v\| \to 0$.

$(*) \Rightarrow$ Komponentenfolgen $v_i^{(j)} \to v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

(denn $|v_i^{(j)} - v_i| \leq \sqrt{\sum_i |v_i^{(j)} - v_i|^2} \leq M \|v^{(j)} - v\|$).

$$\underset{\substack{\text{Verträglichkeit}\\ \text{von + und } \lambda\cdot\\ \text{mit Konvergenz}}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{v_1^{(j)} e_1 + \dots + v_n^{(j)} e_n}_{= v^{(j)}} \to v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$$

Eindeutigkeit von Grenzwerten $\Rightarrow v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$,
d.h. $v \in \mathcal{U}$.

<u>Beweis von Satz 1.5</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\dim \underline{X} < \infty$, $v^{(j)}$ beschr. Folge in $\underline{X}$

Schreibe $v^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} v_i^{(j)} e_i$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis v. $\underline{X}$

Äquivalenz von $\|\cdot\|$ & $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_i |v_i|^2}$

$\Rightarrow$ Koeffizientenvektoren $\begin{pmatrix} v_1^{(j)} \\ \vdots \\ v_n^{(j)} \end{pmatrix}$ beschr. in $\mathbb{K}^n$

Satz von Bolzano-Weierstraß im $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ Koeffizientenvektoren besitzen konv. Teilfolge

$$\begin{pmatrix} v_1^{(j_k)} \\ \vdots \\ v_n^{(j_k)} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (k \to \infty) \text{ in } \mathbb{K}^n$$

Setze $v := \sum_{i=1}^n v_i e_i$. Äquivalenz von $\|\cdot\|$ & $\|\cdot\|_2$

$\Rightarrow \quad \| v^{(j_k)} - v \| \to 0 \quad (k \to \infty)$

dh $v^{(j_k)} \to v$.

(Struktur des Arguments: beschränkte Folge in X

$\overset{\text{Äqui}}{\rightsquigarrow}$ beschränkte Folge von Koeffizientenvektoren in $\mathbb{K}^n$

$\overset{\text{BW}}{\rightsquigarrow}$ konvergente —— // ——

$\overset{\text{Äqui.}}{\longrightarrow}$ konv. Folge in X)

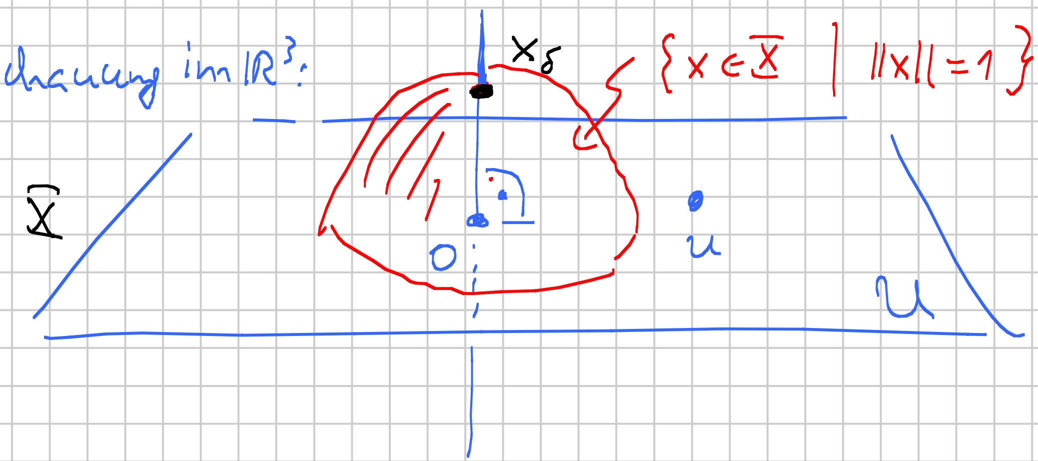
<u>Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i)</u>: Wir zeigen: Falls $\dim X = \infty$, $\exists$ Folge $x_n \in X$ mit $\|x_n\| = 1$ $\forall n$, x_n besitzt keine konv. TF.

Lemma 1.5 (Satz vom fast orthogonalen Element)

Sei $\mathcal{U}$ abgeschlossener UR eines Banachraumes $\underline{X}$, und sei $\mathcal{U} \neq \underline{X}$. Sei $0 < \delta < 1$. Dann $\exists\, x_\delta \in \underline{X}$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und

$$\|x_\delta - u\| \geq 1 - \delta \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

Anschauung im $\mathbb{R}^3$:



Bem.: Für $\underline{X} = \mathbb{R}^3$ geht das sogar für $\delta = 0$, d.h. $\exists\, x_\delta$ mit $\|x_\delta - u\| \geq 1$ $\forall u \in \mathcal{U}$, durch Wahl von x_δ orthogonal zu $\mathcal{U}$.

Bew: Wähle $x \in X \setminus U$.

U abg. $\Rightarrow$ $d := \inf \{ \|x-u\| \mid u \in U \} > 0$

(denn andernfalls $\exists$ Folge $u^{(n)} \in U$ mit $\|u^{(n)} - x\| \to 0$, also $u^{(n)} \to x$, also $x \in \overline{U} = U$, Widerspruch)

Wg. $d > 0$, $\delta \in (0,1)$ ist $\quad d < \frac{d}{1-\delta}$.

Also $\exists\, u_\delta \in U$: $\|x - u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}$

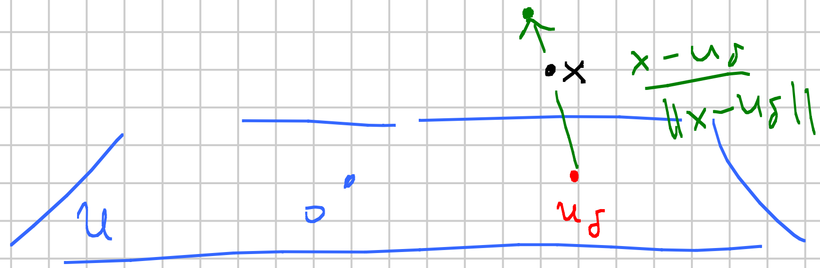
Setze $x_\delta := \frac{x - u_\delta}{\|x - u_\delta\|}$, dann $\|x_\delta\| = 1$

Sei nun $u \in U$ beliebig. Dann ist

$$\|x_\delta - u\| = \left\| \frac{x}{\|x-u_\delta\|} - \frac{u_\delta}{\|x-u_\delta\|} - u \right\|$$

$$= \frac{1}{\|x-u_\delta\|} \Big\| x - \underbrace{(u_\delta + \|x-u_\delta\| u)}_{\in U} \Big\|$$

$$\geq \frac{d}{\|x-u_\delta\|} > \frac{d}{\frac{d}{1-\delta}} = 1-\delta.$$



<u>Konstruktion der x_n für (ii) $\Rightarrow$ (i)</u> (durch wiederholte Anwendg. des Satzes vom fast orthog. El.):

Sei $\dim X = \infty$. Wähle $x_1 \in X$,

$$\|x_1\| = 1.$$

$U_1 := \operatorname{Span}\{x_1\}$. Abgeschl. wg. Kor. 1.3, von X verschieden wg. $\dim X = \infty$. Satz vom fast orth. Element (mit $\delta = \frac{1}{2}$)
$\Rightarrow \exists\, x_2$ mit

$$\|x_2\| = 1, \quad \|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

$U_2 := \operatorname{Span}\{x_1, x_2\}$, Satz vom f. o. El. $\Rightarrow \exists\, x_3$ mit

$$\|x_3\| = 1, \quad \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Iterive $\Rightarrow \exists\, (x_n)$ mit

$$\|x_n\| = 1, \quad \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall\ n \neq m.$$

Beschränkt, aber keine konv. TF!