4. (f) Der Raum L^∞:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar

$\tilde{L}^\infty(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f$ meßbar, $\exists C > 0 : |f(x)| \leq C$ f.ü.$\}$

$[f] = \{ \tilde{f} \in \tilde{L}^\infty(\Omega) \mid \tilde{f} = f$ f.ü.$\}$ Äquiv.klassen

$L^\infty(\Omega) := \{ [f] \mid f \in \tilde{L}^\infty(\Omega) \}$

$\|[f]\|_\infty := \|\tilde{f}\|_\infty := \inf \{ C > 0 \mid |\tilde{f}(x)| \leq C$ f.ü.$\}$

$\tilde{f}$ beliebiges Element von $[f]$

$\|\tilde{f}\|_\infty$ unabh. v.d. Wahl von $\tilde{f}$

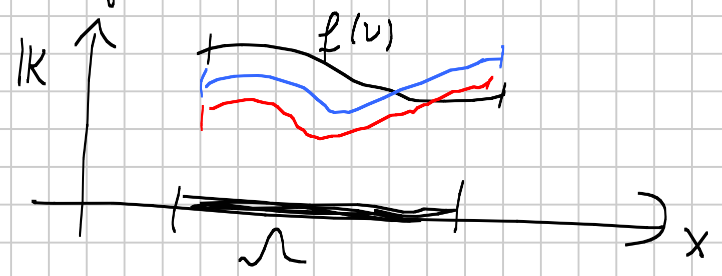
Bem.: Ω beschränkt, $|\Omega| := \mathrm{vol}(\Omega) = \mu(\Omega)$

$\Rightarrow$ man kann zeigen, daß $\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \left(\frac{\int_\Omega |f|^p \, d\mu}{|\Omega|} \right)^{1/p}$

$\forall f \in \tilde{L}^\infty(\Omega)$. Vgl. Blatt 1, 2 b).

Satz 1.2 Der Raum $\ell^\infty(\Omega)$, Ω beliebige Menge, ist ein Banachraum. Insbesondere ist $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^\infty$ Banachraum.

Bew: Die Norm auf $\ell^\infty(\Omega)$ ist definiert als $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$. z.z.: Cauchyfolgen in $\ell^\infty(\Omega)$ sind konvergent. Sei $f^{(\nu)}$ eine Cauchyfolge, d.h.



$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \; \|f^{(\nu)} - f^{(\mu)}\|_\infty < \varepsilon \quad \forall_{\mu,\nu} \geq N.$

Idee: Konstruiere Kandidat f. GW punktweise.

Sei $x \in \Omega$ fest, aber beliebig. Dann:

(*) $$|f^{(\nu)}(x) - f^{(\mu)}(x)| \leq \|f^{(\nu)} - f^{(\mu)}\|_\infty < \varepsilon$$

$\forall \mu, \nu \geq N$. D.h. $\{f^{(\nu)}(x)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). <u>Vollständigkeit von $\mathbb{K}$</u> $\Rightarrow$ $\{f^{(\nu)}(x)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $\exists \lim_{\nu \to \infty} f^{(\nu)}(x) =: f(x)$.

Kandidat f. GW von $f^{(\nu)}$ in $\ell^\infty(\Omega)$: f.

<u>z.z.:</u> $f \in \ell^\infty(\Omega)$, $\|f^{(\nu)} - f\|_\infty \to 0$

$$(*) \Rightarrow |f^{(\nu)}(x) - f^{(\mu)}(x)| < \varepsilon \quad \forall \nu \geq \mu \geq N \quad \Big|\ \nu \to \infty$$

$$\Rightarrow (i) \quad |f(x) - f^{(\mu)}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall \mu \geq N$$

$$(ii) \quad |f(x)| \leq |f^{(N)}(x) - f(x)| + |f^{(N)}(x)| \underset{(i)}{\leq} \varepsilon + |f^{(N)}(x)| \quad \Big|\ \sup_{x \in \Omega}$$

$$\Rightarrow (ii)' \quad \|f\|_\infty \leq \varepsilon + \underbrace{\|f^{(N)}\|_\infty}_{< \infty, \text{ da } f^{(N)} \in \ell^\infty(\Omega) \text{ n.V.}} < \infty$$ d.h. $f \in \ell^\infty(\Omega)$

$$(i)' \quad \|f - f^{(\mu)}\| \leq \varepsilon \quad \forall \mu \geq N$$ d.h. $f^{(\mu)} \to f$ in $\ell^\infty(\Omega)$.

Satz 1.3 a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Raum $C^b(\Omega)$ ist Banachraum.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Der Raum $C^k(\overline{\Omega})$ ist Banachraum für alle $k \in \mathbb{N}$.

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar, $1 \leq p \leq \infty$. Der Raum $L^p(\Omega)$ ist Banachraum.

[stetige, diff'bare, und int'bare Fkt'en bilden jeweils für geeignete Normen einen Banachraum.]

Bew.: a) $C^b(\Omega)$ ist abgeschlossener UR des B-Raumes $\ell^\infty(\Omega)$, also wg. Lemma 1.2 B-Raum. ($\to$ Blatt 1)

b) Nur für $C^1([a,b])$.

$$C^1([a,b]) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig diffbar, } f \text{ \& } f' \text{ besitzen stetige Fortsetzungen auf } [a,b] \}$$

$$\|f\|_{C^1} = \sup_{x\in(a,b)} |f(x)| + \sup_{x\in(a,b)} |f'(x)|$$

Normeigenschaft: trivial

Vollständigkeit:

Sei $\{f^{(n)}\}$ Cauchfolge in $C^1([a,b])$

Also: $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$: $\|f^{(n)}-f^{(m)}\|_\infty + \|f^{(n)'}-f^{(m)'}\|_\infty < \varepsilon$ $\forall m,n \geq N$.

Also $\{f^{(n)}\}$, $\{f^{(n)'}\}$ Cauchyfolgen im $C^b([a,b])$

Satz 1.3 a) (Vollst. von $C^b([a,b])$) $\Rightarrow$

$\exists f, g \in C^b([a,b])$ mit

(**) $\|f^{(n)}-f\|_\infty \to 0$, $\|f^{(n)'}-g\|_\infty \to 0$ $(n\to\infty)$.

(D.h. $f^{(n)}$ glm konv. gegen f, $f^{(n)'}$ glm. konv. gegen g.)

z.z.: f diff'bar, $f'=g$.

Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} \int_a^x f^{(n)\prime} & \underset{\text{Hauptsatz}}{=} & f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ \int_a^x g & & f(x) - f(a) \end{array}$$

(da $f^{(n)}$ glm. konv. gegen g, und Integration verträglich mit glm. Konv.)

d.h. f ist Stammfkt. von g. Hauptsatz $\Rightarrow$ f diff'bar, $f' = g$. Also $f \in C^1([a,b])$.

Einsetzen der Identität $f' = g$ in $(**)$ liefert

$$\|f^{(n)} - f\|_{C^1} = \|f^{(n)} - f\|_\infty + \|f^{(n)\prime} - f'\|_\infty \to 0 \ (n \to \infty)$$

d.h. $f^{(n)}$ konvergiert gegen f in $C^1([a,b])$.

c) : Wir zeigen nur, daß $\|\cdot\|_p$ Norm.

[Vollständigkeit: Siehe Bücher/Vorlesungen über Maßtheorie, oder Werner S. 15-17. Der Beweis benutzt Konvergenzsätze aus der Maßtheorie, z.B. Satz v. d. dominierten Konvergenz.]

Positivität: schon gezeigt

Homogenität: 1-Zeilen-Rechnung:

$f \in \tilde{L}^p(\Omega), \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_\Omega |\lambda f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(|\lambda|^p \int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = |\lambda| \, \|f\|_p$$

Dreiecksungl.:

<u>Lemma 1.3</u> (Hölder'sche Ungleichung für Funktionen)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar, $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \tilde{L}^p(\Omega)$, $g \in \tilde{L}^q(\Omega)$. Dann gilt $fg \in \tilde{L}^1(\Omega)$,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

__Bew.:__ (analog zu Hölder'scher Ungl. für Folgen)

$$A := \|f\|_p, \quad B := \|g\|_q$$

$$\frac{|f(x)|}{A} \cdot \frac{|g(x)|}{B} \underset{\text{Young}}{\leq} \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{A}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{B}\right)^q$$

$\overset{\Longrightarrow}{\text{integriere über } x}$

$$\frac{\int_\Omega |f|\,|g|}{\|f\|_p\,\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\underbrace{\frac{\int_\Omega |f|^p}{A^p}}_{=1} + \frac{1}{q}\underbrace{\frac{\int_\Omega |g|^q}{B^q}}_{=1} = 1.$$

__Korollar 1.2__ (Minkowski'sche Ungl. für Funktionen)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar, $1 \leq p \leq \infty$, $f, g \in \tilde{L}^p(\Omega)$ $\Longrightarrow$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(Dreiecksungl. für die p-Norm)

__Beweis__

$$\|f+g\|_p^{\cancel{p}} = \int_\Omega |f+g|^p \leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)$$

$$\underset{\substack{\text{Hölder} \\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}}{\leq} \underbrace{\big\| |f+g|^{p-1} \big\|_q}_{\cancel{= \|f+g\|^{p-1}_{\underbrace{q\cdot(p-1)}_{=p}}}} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right).$$

(Ende der Liste von Beispielen.)

Frage zur Def. des Begriffes "normierter VR": Man hat sowohl (a) algebraische Operationen (Addition, Mult. mit Skalaren) als auch (b) die "analytische" Operation der Grenzwertbildung. Sind (a) & (b) "kompatibel"?

Satz 1.4 (Verträglichkeit der algebraischen Operationen und der Norm mit Konvergenz)

Sei X ein normierter Vektorraum. Dann gilt:

a) Aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ folgt $x_n + y_n \to x + y$

b) Aus $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{K}$ und $x_n \to x$ folgt $\lambda_n x_n \to \lambda x$

c) Aus $x_n \to x$ folgt $\|x_n\| \to \|x\|$.

<u>Bew.</u>: Blatt 2 Aufgabe 5.

<u>Frage</u>: Gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß (jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge) auch in allgemeinen Banachräumen?

<u>Bsp</u>: $\underline{X} = \ell^2 = \{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \|a\|_2 = \left(\sum_n |a_n|^2\right)^{1/2} < \infty \}$

$a^{(1)} = (1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$

$a^{(2)} = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$

$a^{(3)} = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$

etc.

$\| a^{(j)} \|_2 = 1$ für alle j, d.h. $a^{(j)}$ beschränkt

Keine konvergente Teilfolge, da

$$\| a^{(j)} - a^{(\ell)} \|_2 = \| (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{te Stelle}}}{1}, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \ell\text{te Stelle}}}{-1}, 0, \dots) \|_2$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \forall \ell \neq j$$

d.h. $a^{(j)}$ keine Cauchyfolge $\lightning$