Funktionalanalysis: Zusammenfassung

1) Konzepte
2) PS'e in der Sprache der F.A. formulieren und analysieren können
3) Sätze u. ihre Var'en
4) Beweise

1): Räume

- normiert
- Banach ⚠
- Hilbert
- separabel
- reflexiv
- Konvergenz
- schwache Konv.

lin. Operatoren

- stetig, $L(X,Y)$
- stetige Funktionale, X^*
- invertierbar
- Fredholm
- kompakt
- selbstadj. $>$
- Spektrum (inkl. Typen, Aufg. 46)

2) z.B. Aufgaben 36, 37 z.B. $y'' + a(x)y' + b(x)y = \begin{cases} c(x) \\ \lambda y \end{cases}$

$\rightsquigarrow \quad A y = c$

Fktnalanalyt. Sichtweise v. Fourierreihen

[Keine PDE's.]

(4) 3 Beweise $\rightsquigarrow$ 15 Pkte

- Satz 6.2 (Spektralsatz f. komp. selbstadj.)

  <u>nicht</u>: Bew. von Lemma 6.7, 6.8, aber <u>inkl.</u> Bew. v. Lemma 6.6, Satz 6.3

  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$ $\quad AU \subseteq U \Rightarrow AU^\perp \subseteq U^\perp$ $\quad$ Rayl.-Ritz $\exists \max_{\|x\|=1} \langle x, Ax\rangle$

- Satz 7.1 (Riesz'scher Darst. satz)

  Aufgabe 18

  $L \longrightarrow L = \langle \cdot, x \rangle$ $\quad$ Min. $\frac{1}{2}\|x\|^2 - Lx$

- Satz 9.2 (Schwache Folgenkpktheit)

  <u>nicht</u>: Bew. von Lemmas 9.1, 9.2; nur separabler Fall

3) Sätze

Räume	$\mathbb{R}^n$	∞D Hilbert-R.	∞D reflexive Banach-R.	∞D B-Räume
konv. TFen	✓	—	—	— Satz 1.5
Schwach konv. TFen	✓	✓ Riesz + Satz 9.2	✓ Satz 9.2	—
Existenz alg. Komplemente alg. UR^e	✓	✓ Proj. Satz	(✓) falls endl. dim. Aufg. 48	(✓) falls endl. dim. Aufg. 48

lin. Op'en	$n \times n$ Matrizen	Kompakte	Fredh. Index 0 [inv'bar]	Fredh.	selbstadj.	selbstadj. + kpkt	stetige
offene Mengen → —"—	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓ Satz v. d. off. Abb.
A stetig, inv'bar ⇒ A^{-1} stetig	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓ Kor.
spec = EW'e	✓	✓ bis auf 0	—	—	—	✓ bis auf 0	—
Basis aus verallg. Eigenfkt. (d.h. $\text{Ker}(T-\lambda I)^n$)	✓	✓ bis auf 0	—	—	—	—"—	—
ONB aus E-vektoren	✓ wenn symm.	—	—	—	—	✓ Spektralsatz	—
injektiv = surj.	✓	—	✓ (Def.)	—	(✓) $\overline{\text{Ran}\, A} = (\text{Ker}\, A^*)^\perp$ (Satz 7.3)	(✓)	—
Menge invar. unter kl. Störungen	✓	—	✓	✓ Menge der Fredh. Op'en offen, Index lokal konst. [✓]	—	—	—

Ausblick

- Evolutionsgleichungen im B-Raum
  ($A\cancel{x} = b \rightsquigarrow \dot{x}(t) = A\,x(t)$),
  Funktionalkalküle (Fkt'en v. Op'en, zB e^{tA})
  ($x(t) = e^{tA}\,x(0)$)
  (vgl. Aufg. 4)

- normierte VR'e
  schwache Konv. $\Bigg\rangle$ topologische VR'e

  Haken: $\nexists$ Topologie, die exakt der schw. Konv. entspricht
  Grund: $\overline{\overline{A}^{w}}^{w} \underset{\text{i.a.}}{\neq} \overline{A}^{w}$, siehe Aufg. 53.

- Anw'en v. Fkt'analysis auf PDE
  (Sobolev-Räume: $W^{\overset{k}{1},p} = \{ f \in L^p \mid \overset{\nabla^k}{\nabla} f \in L^p \}$)
  $\uparrow$ schwache Abl.

(Part. Diff. Op. $=$ stet. lin. Op. zwischen Sobolev-Räumen)

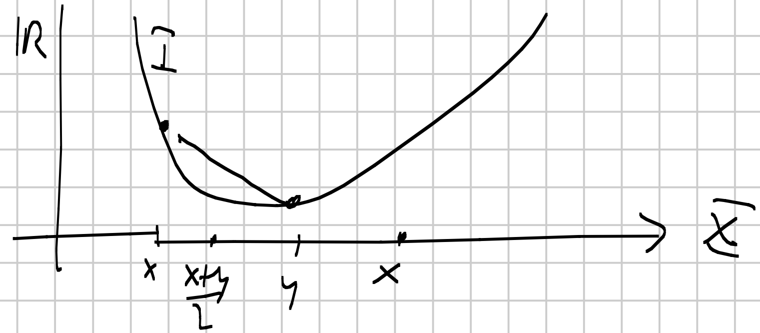
z.B. $\underset{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}}{\overset{\shortparallel}{\Delta}} : W_0^{2,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ stetig, lin., inv'bar

- Nichtlineare Funktionalanalysis

$I : X \to \mathbb{R}$ $\qquad X$ B-Raum, I nicht lin.

<u>Satz 1</u> I stetig, konvex, $I(x) \to \infty$ $(|x| \to \infty)$

$\Rightarrow$ $\exists$ Minimierer.

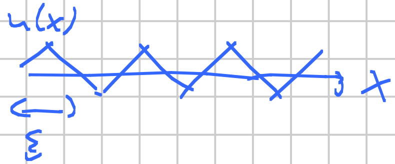


konvex $\Leftrightarrow$ $I\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{I(x) + I(y)}{2}$ $\forall x, y$.

Satz 2 $K : X \to X$ stetig, kompakt, $K(\|x\| \le 1) \subseteq \|x\| \le 1$

$\Rightarrow \quad \exists$ Fixpunkt.

Bsp zu 1. $\quad I(u) = \int_0^1 \Big(\underbrace{\left((u')^2 - 1\right)^2}_{\text{will } u' = \pm 1} + \underbrace{u^2}_{\text{will } u = 0} \Big)\, dx$



$$\inf_{u \in W^{1,4}((0,1))} I(u) = 0$$

$\nexists$ Minimierer, denn $I(u) = 0 \Rightarrow u = 0$

$\Rightarrow u' = 0 \Rightarrow I(u) = 1$ ↯

I erfüllt alle Vor'en von Satz 1 außer Konvexität.