[Bsp'e zu schwacher u. schwach* Konv., Fortsetzg.]

2) <u>Normverlust und "starke" Konvergenz</u>

Hatten gesehen (Prop. 9.1): $\mathfrak{X}$ Hilbert, $x_j \rightharpoonup x$

$\Rightarrow \quad \|x\| \leq \liminf\limits_{j\to\infty} \|x_j\|$. Genauer gilt:

Asymptotischer Normverlust tritt genau dann auf, wenn keine "normale" (oder sogenannte "starke") Konvergenz $x_j \to x$ vorliegt:

<u>Proposition 9.4</u> $\mathfrak{X}$ Hilbert, $x_j \rightharpoonup x$. Dann sind äquivalent:

(i) $\quad \|x_j\| \to \|x\|$ $\quad$ (kein asymptot. Normverlust)

(ii) $\quad x_j \to x$. $\quad$ ("starke" Konvergenz)

<u>Bew.</u>: (ii) $\Rightarrow$ (i): Folgt aus Stetigkeit der Norm ($\to$ §1).

(i) $\Rightarrow$ (ii) (interessante Richtg.):

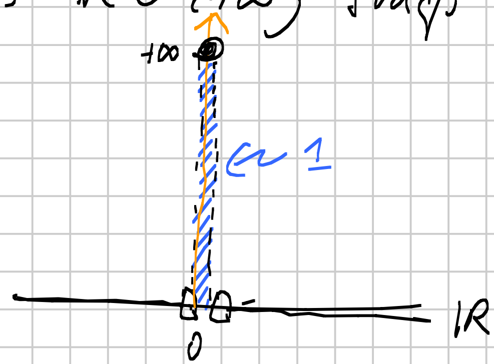
z.z.: $\quad \|x_j - x\| \longrightarrow 0$.

$$\|x_j - x\|^2 = \underbrace{\|x_j\|^2}_{\substack{\to \|x\|^2 \\ \text{wg. (i)}}} \underbrace{-2\,\mathrm{Re}\langle x_j, x\rangle}_{\to -2\,\mathrm{Re}\langle x, x\rangle \text{ wg. } x_j \rightharpoonup x} + \|x\|^2 \longrightarrow 0.$$

3) <u>Deltafunktion.</u> (P. Dirac, 1930s, Physik-Nobelpreisträger)

δ ist eine/die "Funktion" $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sodass

$$(*) \quad \begin{cases} \delta(0) = \infty \\ \delta(x) = 0 \quad \forall\, x \neq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \delta = 1 \end{cases}$$

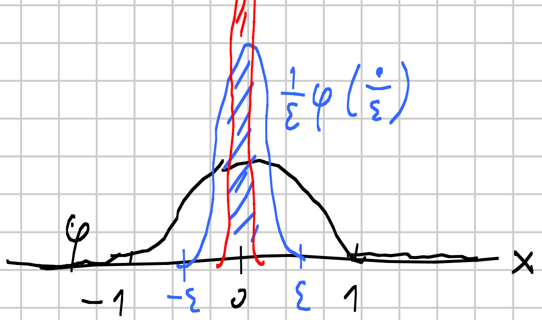


Ursprüngliche Mathematikerreaktion: Gibt es nicht.
$f(x) = 0$ f.ü. $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f = 0$ [wenn $\int_{\mathbb{R}}$ in üblicher math. Weise, z.B. Lebesgueintegral, interpretiert wird.]

Konsequenz aus (*) (Dirac): $$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)} \quad (A)$$

Eigenschaften von δ (Dirac): $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = 0$ $(x \notin [-1,1])$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\tfrac{\cdot}{\varepsilon}\right) \text{ "konvergiert gegen" } \delta} \quad (B)$$



Funktionalanalytischer Standpunkt:

1. Betrachte die Abbildung $\delta : C_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\delta f := f(0)$$ [vgl. (A)]

Wobei $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, f(x) \to 0 \ (|x| \to \infty)\}$.
D.h. δ ist keine Fkt., sondern ein lineares Funktional auf $C_0(\mathbb{R})$.

Beh.: $\delta \in C_0(\mathbb{R})^*$ (d.h. δ stetiges lin. Fktnal)

Bew.: $|\delta f| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$

2. Die $\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ können ebenfalls in natürlicher Weise als Elemente von $C_0(\mathbb{R})^*$ aufgefasst werden: Definiere für $\psi \in L^1(\mathbb{R})$

$$L_\psi : C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L_\psi f := \int_{\mathbb{R}} \psi f .$$

(L_ψ ist das zu ψ assoziierte Fktnal "Integriere gegen ψ")

$L_\psi \in C_0(\mathbb{R})^*$, denn $\left| L_\psi f \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \psi f \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\psi| |f| \leq \|\psi\|_1 \|f\|_\infty$

3. <u>Beh:</u> Sei φ wie oben, d.h. stetig, ≥ 0, $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$, $\varphi = 0$ außerh. $(-1,1)$.

Dann:

$$L_{\frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)} \xrightarrow{*} \delta \quad \text{in } C_0(\mathbb{R})^*.$$

<u>Bew:</u> z.z. $L_{\frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)} f \to \underbrace{\delta f}_{\overset{\text{Def. von } \delta}{=} f(0)} \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} L_{\frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)} f &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(0)\, dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(f(x) - f(0)\right) dx \\ &= f(0) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon}\, dx}_{\substack{y = \frac{x}{\varepsilon} \\ dy = \frac{dx}{\varepsilon}}\!\!= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dy = 1} + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (f(x) - f(0))\, dx}_{} \end{aligned}$$

$$|\ldots| \leq \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx}_{=1} \cdot \underbrace{\sup_{x \in [-\varepsilon,\varepsilon]} |f(x) - f(0)|}_{\to 0, \text{ da } f \text{ stetig}}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f(0) + 0 .$$

Zusammenfassung: Interpretiere die beteiligten "Funktionen" $\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ und δ als Elemente eines geeigneten Dualraumes, dann ist (B) gültig als schwach$*$-Konvergenz. Obwohl die approximierenden Funktionale $L_{\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon})}$ eine Integraldarstellg. der Form $L_\psi, \psi \in L^1$, besitzen, gilt dies nicht für das Limesfunktional, d.h $\nexists\, \psi \in L^1 : \quad \delta = L_\psi$.

3) <u>Mehr über den Dualraum $C_0(\mathbb{R})^*$.</u>

<u>Prop. 9.5</u> $\forall L \in C_0(\mathbb{R})^*$ $\exists$ Borel-maße μ_+, μ_- auf $\mathbb{R}$ sodaß

$$Lf = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_+ - \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_- ,$$

$$\mu_+(\mathbb{R}) + \mu_-(\mathbb{R}) = \| L \| < \infty .$$

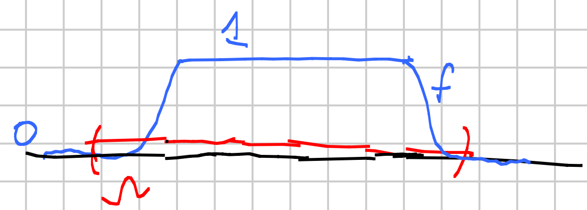
Beweisideen: • μ_+, μ_- Borelmaße, $\mu_+(\mathbb{R}) + \mu_-(\mathbb{R}) < \infty$

$\Rightarrow \quad Lf := \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_+ - \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_- \in C_0(\mathbb{R})^*$, denn $|Lf| \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} d\mu_+ + \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} d\mu_-$,

insbes. $\|L\| \leq \mu_+(\mathbb{R}) + \mu_-(\mathbb{R})$

- L gegeben. Spezialfall: $Lf \geq 0 \quad \forall f \geq 0$.

Setze $\mu_- := 0$, $\mu_+(\Omega) := \sup\{Lf \mid f \in C_0(\mathbb{R}), 0 \leq f \leq 1, f = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \setminus \Omega\}$



($\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen).

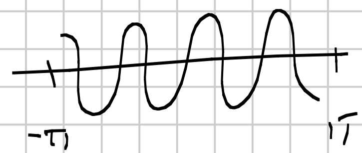
Zeige, daß die so definierte Abb. $\mu_+ : \{\text{offene Teilmengen von } \mathbb{R}\} \to [0,\infty)$ ein Borel-Maß ist.

W-Theorie: $\{\mu_j\}$ Folge von W-Maßen auf $\mathbb{R}$, d.h. Borel-Maßen auf $\mathbb{R}$ mit $\mu_j(\mathbb{R}) = 1$ $\Rightarrow$ $\{\mu_j\}$ beschr. Folge in $C_0(\mathbb{R})^*$

$\Rightarrow$ $\exists$ schwach* konv. TF, wg. Banach-Alaoglu.

4) **Riemann-Lebesgue-Lemma aus der Fourieranalysis**

$$\forall f \in L^2([-\pi,\pi]) : \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm i n x} f(x)\, dx = 0 \quad (*)$$



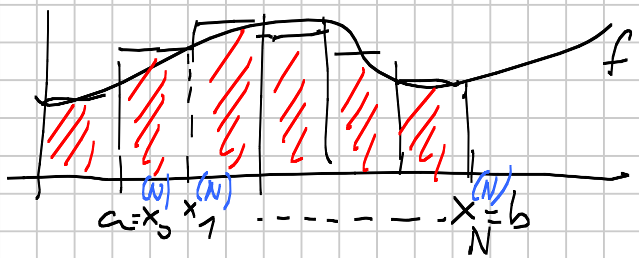
Funktionalanalytischer Standpunkt:

$$(*) \iff e^{\pm i n \cdot} \longrightarrow 0 \quad \text{in } L^2([-\pi,\pi]) \quad (n\to\infty)$$

Bew. v. (*): $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i n \cdot} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormal

$\{e_j\}$ ON in Hilbertraum $\Rightarrow$ $e_j \longrightarrow 0 \quad (j\to\infty)$.

5) **Riemann-Integral** $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig



$$a = x_0^{(N)} < x_1^{(N)} < \ldots < x_{N-1}^{(N)} < x_N^{(N)} = b$$

$$x_j^{(N)} = a + j \cdot h, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

$$S_N f := \underbrace{\sum_{j=1}^{N} f(x_j^{(N)}) \cdot \frac{1}{N}}_{\text{Flächeninhalt } j\text{-tes Rechteck}} \quad \text{Riemann-Summe}$$

$$S_N f \to \int_a^b f \qquad (N \to \infty). \qquad (*)$$

Funktionalanalytischer Standpunkt

$S_N : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetiges lineares Funktional

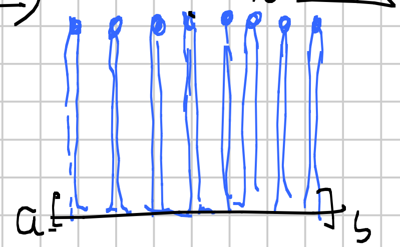
$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{x_j^{(N)}} \quad , \quad \delta_x f := f(x) \quad (x \in [a,b])$$

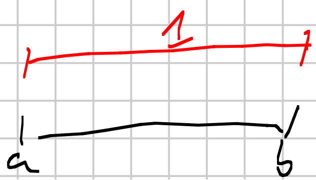
$\psi \in L^1([a,b]) \Rightarrow L_\psi : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ stet. lin. Funktional

$$L_\psi f := \int_a^b \psi f$$

Insbesondere $L_1 : f \mapsto \int_a^b f$ stet. lin. Funktional

$(*) \Longleftrightarrow S_N \xrightarrow{*} L_1$ in $C([a,b])^*$





g schwache Abl. von f

$$\Leftrightarrow \int_a^b g\,\varphi = -\int_a^b f\,\varphi' \quad \forall \varphi \in C_0^\infty($$