[Wdh: $\mathfrak{X}$ reflexiv $\Rightarrow$ jede beschr. Folge hat schwach konv. TF] ← Satz 9.2

[$\mathfrak{X}$ reflexiv $\Leftrightarrow$ jedes stetige lin. Fktnal x^{**} auf $\mathfrak{X}^*$ ist v. d. Form $x^{**}(L) = L(x)$ für ein $x \in \mathfrak{X}$]

[Hilberträume $\subsetneq$ reflexive B-Räume $\subsetneq$ all. B-Räume]

L^2, ℓ^2 — $L^p, \ell^p \ (1 < p < \infty)$ — $\ell^1, \ell^\infty, L^1, L^\infty$

Beweisidee: schwache Konv. in $\mathfrak{X}$
$\hat{=}$ schwach* Konv. in $\mathfrak{X}^{**}$

① **Beweis (Satz 9.2) für $\mathfrak{X}$ separabel.**

(1) $x_j \rightharpoonup x$ in $\mathfrak{X}$

$\Leftrightarrow$ $L(x_j) \to L(x) \quad \forall L \in \mathfrak{X}^*$

$$L(x_j) = (x_j)_A(L), \qquad L(x) = x_A(L)$$

$\Leftrightarrow$ $(x_j)_A \xrightarrow{*} x_A$ in $\mathfrak{X}^{**}$

Notation: Zu $x \in \mathfrak{X}$ sei $x_A \in \mathfrak{X}^{**}$ das Auswertefunktional auf x, d.h.
$x_A(L) = L(x) \quad \forall L \in \mathfrak{X}^*$

(2) $\qquad x_j$ beschr. in $\underline{X}$

$\Leftrightarrow \quad (x_j)_A$ — " — $\underline{X}^{**}$

denn $\|x_A\| = \sup\limits_{L \in \underline{X}^* \setminus \{0\}} \dfrac{|x_A(L)|}{\|L\|} \underset{\text{Def. v. } x_A}{=} \sup\limits_{L \in \underline{X}^* \setminus \{0\}} \dfrac{|L(x)|}{\|L\|} \underset{\text{Kor. von Hahn-Banach}}{=} \|x\|$

(d.h. $\underline{X}$ und $\underline{X}^{**}$ sind sogar isometrisch)

(3) $\underline{X}$ separabel n.V. $\underset{(2),\ \underline{X} \text{ reflexiv}}{\Rightarrow} \underline{X}^{**}$ separabel $\underset{\text{Lemma 9.1 (unten)}}{\Rightarrow} \underline{X}^{*}$ separabel.

Also: x_j beschr. $\underset{(2)}{\Rightarrow} (x_j)_A$ beschr.

$\underset{\text{Banach-Alaoglu (anwendb. wg. (3))}}{\Rightarrow} (x_j)_A \xrightarrow{*} \underset{\in \underline{X}^{**}}{L} \underset{\underline{X} \text{ refl.}}{=} x_A$ für ein $x \in \underline{X}$

$\underset{(1)}{\Rightarrow} x_j \rightharpoonup x$.

Noch z.z.: $\underline{X}^*$ separabel.

Lemma 9.1 $\mathbb{X}$ Banachraum, $\mathbb{X}^*$ separabel $\Rightarrow$ $\mathbb{X}$ separabel.

[⚠ $\mathbb{X}$ separabel $\not\Rightarrow$ $\mathbb{X}^*$ separabel, z.B. $\mathbb{X} = L^1((0,1))$ sep., $\mathbb{X}^* = L^\infty((0,1))$ nicht.]

Bew.: $\mathbb{X}^*$ separabel $\Rightarrow$ $\exists \{L_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ abz. dichte TM von $\{L \in \mathbb{X}^* \mid \|L\| = 1\}$

Konstruiere zu jedem L_j ein "geeignetes" $x_j \in \mathbb{X}$:

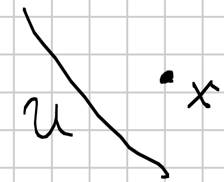
Wg. $1 = \|L_j\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |L_j(x)|$ $\exists\, x_j \in \mathbb{X}$ mit $\|x_j\| = 1$, $|L_j(x_j)| \geq \frac{1}{2}$.

[Bsp: $\mathbb{X}$ Hilbert, $L_j = \langle \cdot, e_j \rangle \Rightarrow x_j := e_j$]

Beh.: $\operatorname{Span}\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dicht in $\mathbb{X}$ ($\Rightarrow$ Beh., da $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}\{x_j\}$ bzw. $\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}\{x_j\}$ dicht in $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{x_j\}$ bzw. $\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{x_j\}$)

Bew: Sei $\mathcal{U} := \overline{\operatorname{Span}\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}}$. Falls $\mathcal{U} \subsetneq \mathbb{X}$, $\exists$ (wg. Hahn-Banach) $L \in \mathbb{X}^*$ mit $L|_{\mathcal{U}} = 0$, $L(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{X} \setminus \mathcal{U}$,

OBdA $\|L\| = 1$.



Wähle L_{j_0} mit $\|L - L_{j_0}\| < \frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{2} \leq |L_{j_0}(x_{j_0})| = |L_{j_0}(x_{j_0}) - \underbrace{L(x_{j_0})}_{=0,\text{ da } x_{j_0} \in \mathcal{U}.}| \leq \underbrace{\|L_{j_0} - L\|}_{< \frac{1}{4}} \cdot \underbrace{\|x_{j_0}\|}_{1} \quad ⚡.$$

Bew. (Satz 9.2) für $\mathfrak{X}$ nicht separabel.

Idee: Satz ist eine Aussage über Folgen $\{x_1, x_2, \ldots\}$.
Jede Folge liegt automatisch in einem separablen B-Raum, nämlich $\mathcal{U} := \operatorname{Span}\{x_1, x_2, \ldots\}$.

x_j beschr. Folge in $\mathfrak{X}$

$\Rightarrow$ x_j —"— im separablen B-Raum $\mathcal{U}$

Wg. Lemma 9.2 (siehe unten) ist auch $\mathcal{U}$ reflexiv.

Bew. (Satz 9.2), Teil 1 $\Rightarrow$ $\exists$ TF $x_{j_k} \longrightarrow x \in \mathcal{U}$ in $\mathcal{U}$.

D.h. $L(x_{j_k}) \to L(x)$ $\forall L \in \mathcal{U}^*$

Für $\tilde{L} \in \mathfrak{X}^*$ ist $\tilde{L}|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}^*$

$\Rightarrow \quad \tilde{L}(x_{j_k}) \longrightarrow \tilde{L}(x) \quad \forall \tilde{L} \in \underline{X}^*.$

noch z.z.: $\mathcal{U}$ reflexiv.

<u>Lemma 9.2</u> $\underline{X}$ reflexiver B-Raum, $\mathcal{U}$ abg. UR $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ reflexiv.

[vgl.: $\underline{X}$ Hilbert, $\mathcal{U}$ abg. UR $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ Hilbert.]

<u>Bew</u> Sei $u^{**} \in \mathcal{U}^{**}$. z.z.: $\exists x \in \mathcal{U}$ mit

$$u^{**}(L) = L(x) \quad \forall L \in \mathcal{U}^*.$$

Idee: "Bastele" aus $u^{**} \in \mathcal{U}^{**}$ ein Fkt.nal $\in \underline{X}^{**}$, benutze $\underline{X}$ refl.

L lin. Fktnal auf $\mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $u^{**}(L)$ wohldef.

$\tilde{L}$ —"— $\underline{X}$ $\Rightarrow$ $u^{**}(\underbrace{\tilde{L}|_{\mathcal{U}}}_{\in \mathcal{U}^*})$ —"—,

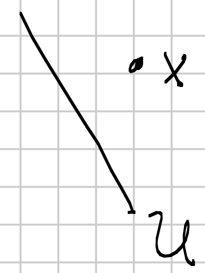
<u>Schritt 1.</u>

Die Abb. $\tilde{L} \mapsto u^{**}(\tilde{L}|_{\mathcal{U}})$ ist stetige lin. Fktnal auf $\underline{X}^*$

$\underline{X}$ reflexiv $\Rightarrow$ $\exists x \in \underline{X}$;

(1) $\quad u^{**}(\tilde{L}|_{\mathcal{U}}) = \tilde{L}(x) \quad \forall \tilde{L} \in X^*.$

<u>Schritt 2</u> $\quad x \in \mathcal{U}$. Andernfalls $\exists$ wg. Hahn-Banach $\tilde{L} \in X^*$ mit $\boxed{\tilde{L}|_{\mathcal{U}} = 0, \ \tilde{L}(x) \neq 0}$



Einsetzen in (1)

$\Rightarrow$ linke Seite $= 0$, rechte Seite $\neq 0$ $\quad$ ↯

<u>Schritt 3</u> (bis jetzt: (1) gilt für $\tilde{L} \in X^*$.)

z.z.: $\quad u^{**}(L) = L(x) \quad \forall L \in \mathcal{U}^*$.

Sei $L \in \mathcal{U}^*$. Hahn-Banach $\Rightarrow \exists \tilde{L} \in X^*$ mit $\tilde{L}|_{\mathcal{U}} = L$.

Einsetzen in (1)

$$\Rightarrow \quad u^{**}(L) = \tilde{L}(x) \overset{x \in \mathcal{U} \text{ wg. Schritt 2}}{=} L(x).$$

$=$

Anwendungen v. schwacher u. schwach* Konvergenz.

1) Trick-freier Bew. des Riesz'schen Darstellungssatzes:
$\mathfrak{X}$ Hilbert, $L \in \mathfrak{X}^* \Rightarrow \exists\, x_0 \in \mathfrak{X} : L(x) = \langle x, x_0 \rangle \;\forall x \in \mathfrak{X}$.
(Anm.: $\mathfrak{X}$ reflexiv.)

Betrachte das nichtlin. Funktional $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - L(x)$

Wir wissen: x_0 Minimierer v. F

$$\Rightarrow\; 0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(x_0 + \varepsilon x) = \langle x, x_0 \rangle - L(x) \quad \forall x \in \mathfrak{X}$$

Also nur z.z.: $\exists$ Minimierer x_0 von F.

Bew. mit schwacher Konv.:
Wähle $\{x_j\}$ Minimalfolge von F, d.h. $F(x_j) \longrightarrow \inf_{\mathfrak{X}} F$

1. $F(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \|L\|\,\|x\| \to \infty \quad (\|x\| \to \infty)$
   also x_j beschränkt

2. Satz 9.2 $\Rightarrow \exists$ schwach konv. TF, $x_{j_k} \rightharpoonup x_0 \in \mathfrak{X}$

3

$$F(x_0) = \frac{1}{2}\|x_0\|^2 - L(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|x_{j_k}\|^2 - L(x_{j_k}) = \inf_{X} F$$

also x_0 Minimierer.

$L(x_{j_k}) \to L(x_0)$ wg. Def. d. schw. Konv.

$\|x_0\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_{j_k}\|$ wg. Prop. 9.1