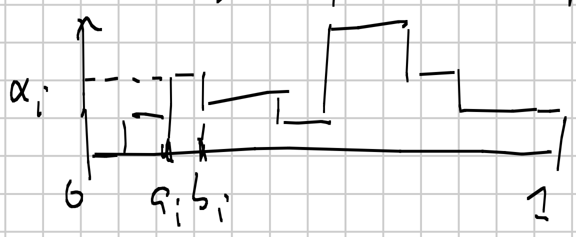
Wdh: Ein B-Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Bsp'e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

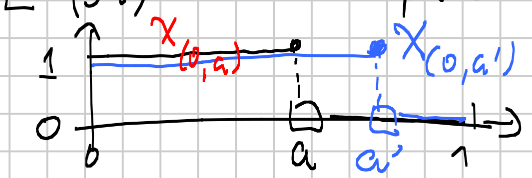
1) $C^0(\overline{\Omega})$ separabel [z.B. $\overline{\Omega} = [0,1]$: Polynome mit rationalen Koeffizienten, $\{ p(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j x^j \mid N \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_j \in \mathbb{Q} \}$, dicht]

2) $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ separabel [z.B. $L^1((0,1))$: Treppenfunktionen mit rationalen Koeffizienten u. Intervallen,



$\{ \chi(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{(a_i,b_i)}, N \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{Q}, a_i, b_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \}$, dicht, wg. Maßtheorie]

3) $L^\infty(\Omega)$ nicht separabel [z.B. $L^\infty((0,1))$: Betrachte $A = \{ \chi_{(0,a)} \mid a \in (0,1) \cap \mathbb{R} \}$.



$\| \chi_{(0,a)} - \chi_{(0,a')} \| \geq 1 \quad \forall a \neq a'$

Angenommen $L^\infty((0,1))$ wäre separabel. Sei $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ abz. dichte TM. $\forall\, \chi_{(0,a)}\ \exists\, n(a)$ sodass $\|b_{n(a)} - \chi_{(0,a)}\| < \frac{1}{3}$.
Also $\|b_{n(a)} - b_{n(a')}\| \geq \frac{1}{3}\ \forall\, a \neq a'$. Also ist die
Abb. $a \mapsto n(a)$ injektiv. $\lightning$ zu $(0,1)$ überabzählbar.]
$(0,1) \to \mathbb{N}$

=

Satz 9.1 (Satz von Banach-Alaoglu). Sei X separabler Banachraum. Dann hat jede beschränkte Teilfolge in X^* eine schwach* konvergente Teilfolge.

Beweis Sei L_j beschränkte Folge in X^*. Wähle $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ abzählbare dichte TM in X. Dann sind die

$$\{L_j(x_\ell)\}_{j \in \mathbb{N}}$$

beschränkte Folgen in $\mathbb{K}$, da $|L_j(x_\ell)| \leq \underbrace{\|L_j\|}_{\text{beschränkt n. Vor.}}\ \underbrace{\|x_\ell\|}_{\text{fest}}$.
Nach Satz von Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{K}$
$\exists$ konv. Teilfolge $\{L_{j_n}(x_k)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Nach Diagonalverfahren (vgl. Bew., daß $C^1([a,b])$ relativ kompakte TM von $C([a,b])$) existiert sogar eine TF_j sodaß

$$\{L_{j_n}(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent für jedes } x_k.$$

Definiere auf $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$:

$$L(x_k) := \lim_{n\to\infty} L_{j_n}(x_k)$$

<u>Beh. 1:</u> L linear auf $\operatorname{Span}\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

<u>Bew:</u> L_j linear, $\lim_{n\to\infty}$ linear.

<u>Beh. 2:</u> L stetig.

<u>Bew.:</u> $|L(x_k)| = \lim_{n\to\infty} |L_{j_n}(x_k)| \le \underbrace{\sup_j \|L_j\|}_{\le \text{const nach Vor.}} \|x_k\|$

Also (Übungen) $\exists$ eindeutige stetige Fortsetzung

$$L : \overline{\operatorname{Span}\{x_1, x_2, x_3, \dots\}} \to \mathbb{K}$$

$$\overline{\operatorname{Span}\{x_1, x_2, x_3, \dots\}} = X$$

noch z.z.: $L_{j_n}(x)$ konvergent nicht nur für $x \in \operatorname{Span}\{x_1, x_2, \dots\}$, sondern alle $x \in X$.

Für $x \in X$, $\varepsilon > 0$ sei $x_\varepsilon \in \operatorname{Span}\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, $\|x_\varepsilon - x\| < \varepsilon$.

$$|L_{j_n}(x) - L(x)| = \left| \underbrace{(L_{j_n}(x) - L_{j_n}(x_\varepsilon))} + \underbrace{(L_{j_n}(x_\varepsilon) - L(x_\varepsilon))} + \underbrace{(L(x_\varepsilon) - L(x))} \right|$$

$$\le \underbrace{| \text{---}\,''\,\text{---} |}_{\le \underbrace{\|L_j\|}_{\le \text{const}} \underbrace{\|x - x_\varepsilon\|}_{< \varepsilon}} + \underbrace{| \text{---}\,''\,\text{---} |}_{\to 0 \ (n \to \infty)} + \underbrace{| \text{---}\,''\,\text{---} |}_{\le \|L\| \cdot \underbrace{\|x - x_\varepsilon\|}_{< \varepsilon}}$$

$$\underset{j \to \infty}{\Rightarrow} \ \limsup_{n \to \infty} |L_{j_n}(x) - L(x)| \le \left(\sup_j \|L_j\| + \|L\| \right) \cdot \varepsilon$$

ε beliebig $\Rightarrow$ $|L_{j_n}(x) - L(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$, d.h. $L_{j_n}(x) \to L(x)$ $\forall x \in X$.

Also $L_{j_n} \xrightarrow{*} L$.

<u>Proposition 9.1</u> (Einbettung eines Banachraumes in seinen Bidualraum)

Sei X Banachraum. Zu jedem $x \in X$ sei

$$J(x) := x_A, \quad x_A(L) := L(x) \quad \forall L \in X^*.$$

Dann gilt: $J(x) \in X^{**}$ (d.h. stetige lin. Abb. auf X^*). Die Abb. $J : X \to X^{**}$ heißt <u>Einbettung</u> von X in X^{**}.

<u>Bew.</u> Linearität von x_A trivial: $x_A(\lambda L + \lambda' L') = (\lambda L + \lambda' L')(x) \overset{\text{Def. v. } x_A}{=} \lambda L(x) + \lambda' L'(x)$

$\overset{\text{Def. v. } + \text{ u. } \lambda \cdot \text{ in } X^*}{=} \lambda x_A(L) + \lambda' x_A(L')$ (Def. v. x_A)

Stetigkeit: $|x_A(L)| = |L(x)| \leq \|L\| \, \|x\|$, d.h. $|x_A(L)| \leq \text{const.} \|L\|$.

Bem.: Es folgt $\|x_A\| \leq \|x\|$. Nach Hahn-Banach (Kor. 8.3) $\exists L$ mit $\|L\| = 1$, $L(x) = \|x\|$, also gilt $\|x_A\| = \|x\|$. D.h. die Abb. $J : X \to X^{**}$ ist sogar isometrisch.

<u>Def.</u> Ein B-Raum X heißt <u>reflexiv</u>, wenn die Einbettungsabbildung $J : X \to X^{**}$ aus Prop. 9.1 <u>surjektiv</u> ist

[d.h. wenn jedes stetige lineare Fktnal x^{**} auf X^* von der Form $x^{**}(L) = L(x)$ für ein $x \in X$ ist.]

Informelle Schreibweise: $X \cong X^{**}$

<u>Satz 9.2</u> (Schwache Folgenkompaktheit der Einheitskugel)

Sei X Banachraum. Dann gilt:

X reflexiv $\Longrightarrow$ jede beschränkte Folge in X besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.

Satz 9.3 (Eberlein - Shmulyan) (ohne Bew.)

$\Longleftarrow$ in Satz 9.2 gilt auch.

[Die Bed. X reflexiv ist nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für Existenz schwach konv. TF'en.]

Bsp'e

1) X Hilbertraum $\Rightarrow$ X reflexiv

2) ℓ^p $(1<p<\infty)$ reflexiv, denn

$p' :=$ Lsg der Gl. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \Rightarrow (\ell^p)^* \cong \ell^{p'}$

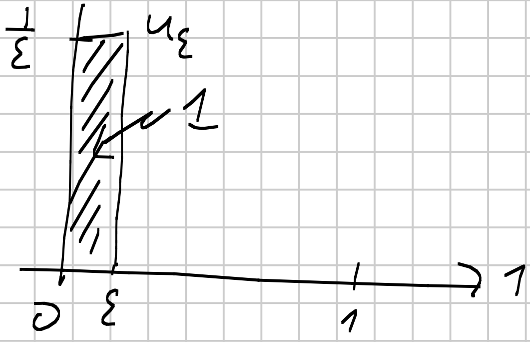
$p'' :=$ Lsg der Gl. $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}=1 \Rightarrow (\ell^p)^{**} \cong (\ell^{p'})^* \cong \ell^{p''}$

Elementare "zahlentheor." Tatsache: $p''=p$. $\Rightarrow (\ell^p)^{**} \cong \ell^p$.

3) $L^p(\Omega)$ $(1<p<\infty,\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar$)$ reflexiv.

4) c_0, ℓ^∞, ℓ^1, $L^\infty(\Omega)$, $L^1(\Omega)$, $C(\bar{\Omega})$ nicht reflexiv.

Bsp. einer beschränkten Folge in $L^1((0,1))$, die keine schwach konv. TF besitzt.



$$u_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\chi_{(0,\varepsilon)}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

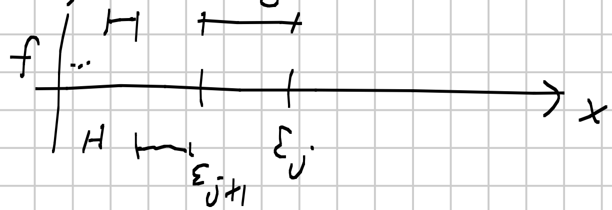
$$\|u_\varepsilon\|_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \chi_{(0,\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon = 1$$

Falls eine beliebige Teilfolge $u_{n_j} = u_{\frac{1}{3^{n_j}}} \to u$ schwach in L^1, würde gelten:

(wg. $(L^1)^* \cong L^\infty$)

$$\int_0^1 u_\varepsilon f \longrightarrow \int_0^1 uf \qquad \forall f \in L^\infty((0,1)).$$

Wähle $f = (-1)^j$ auf $(\varepsilon_{j+1}, \varepsilon_j)$, $\varepsilon_j = \frac{1}{3^{n_j}}$.



$$\int_0^1 u_{n_j} f = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_j}\int_0^{\varepsilon_{j+1}} f}_{|\dots| \le \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}\cdot 1} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_j}\underbrace{\int_{\varepsilon_{j+1}}^{\varepsilon_j} f}_{= (-1)^j \cdot (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1})}}_{= (-1)^j - (-1)^j \cdot \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}}$$

$$= (-1)^j + a_j, \quad |a_j| \le \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u_{n_j} f \begin{cases} \ge \frac{1}{3} & j \text{ gerade} \\ \le -\frac{1}{3} & j \text{ ungerade} \end{cases}, \text{ also } \not\to, \quad ↯.$$