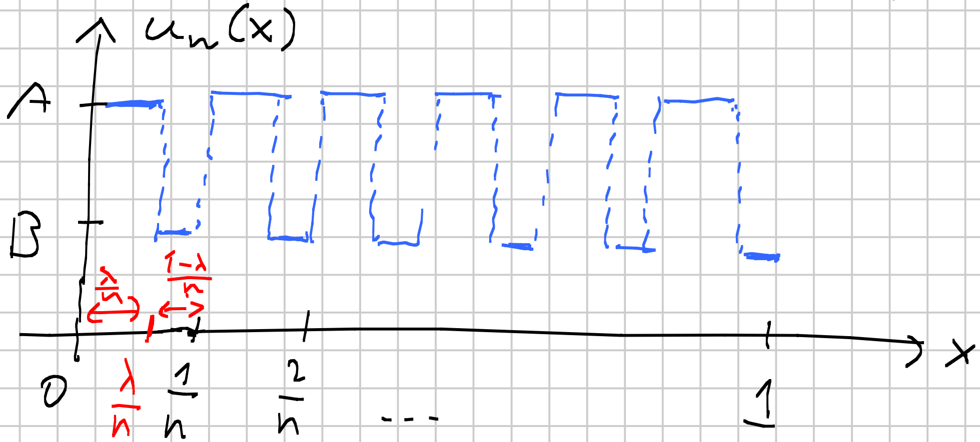
Fundamentales Beispiel zur schwachen Konvergenz

$X = L^2([0,1])$

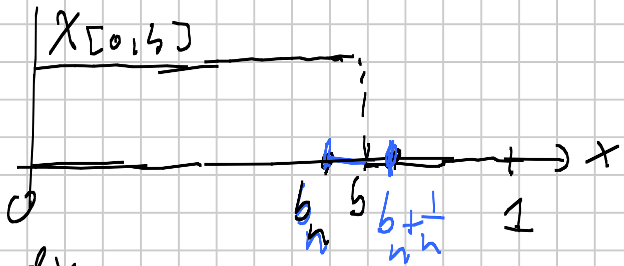


u_n
- periodisch mit Periode $\frac{1}{n}$, d.h. für große n schnell oszillierend
- beschränkt
- nicht konvergent, Bew. später

$\lambda \in (0,1)$ Volumenanteil der Menge, auf der u_n den Wert A hat

Bsp. 1 $\langle u_n, \chi_{[0,b]} \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} (\lambda A + (1-\lambda) B)\, b$

$$\chi_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Bew: $\langle u_n, \chi_{[0,b]} \rangle = \int_0^1 u_n(x)\, \chi_{[0,b]}(x)\, dx$

$= \int_0^b u_n(x)\, dx$

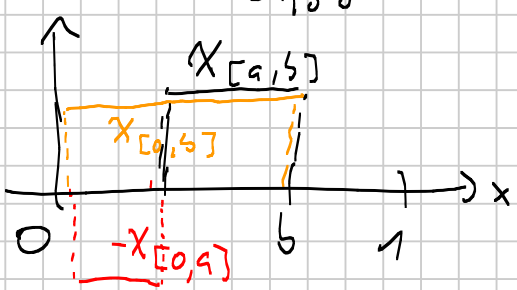
Wähle $b_n = \frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sodaß $b_n \le b \le b_n + \frac{1}{n}$

$$\int = \underbrace{\int_0^{b_n} u_n}_{} + \underbrace{\int_{b_n}^{b} u_n}_{}$$

$$= k \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} u_n = k \cdot \left(\frac{\lambda}{n} A + \frac{1-\lambda}{n} B\right) = b_n \left(\lambda A + (1-\lambda) B\right) \to b \left(\text{---}\,\text{''}\,\text{---} \right)$$

$$|\ldots| \le \|u_n\|_\infty \cdot (b - b_n) \le \max\{|A|, |B|\} \cdot \frac{1}{n} \to 0$$

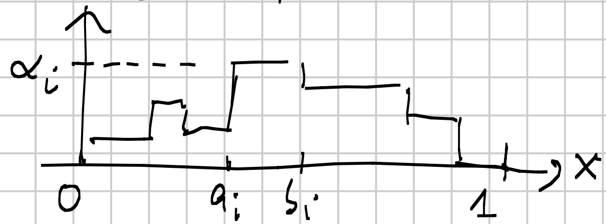
<u>Beh. 2</u> $\langle u_n, \chi_{[a,b]} \rangle \to \left(\lambda A + (1-\lambda) B\right)(b-a)$



<u>Bew:</u> $\langle u_n, \cdot \rangle$ linear,

$$\chi_{[a,b]} = \chi_{[0,b]} - \chi_{[0,a]}$$

<u>Beh. 3</u> (Treppenfunktionen) $\left\langle u_n, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{[a_i,b_i]} \right\rangle$



$$\to \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\lambda A + (1-\lambda) B\right)(b_i - a_i)$$

$$= \left\langle u, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{[a_i,b_i]} \right\rangle$$

mit $u(x) \equiv \text{const} = \lambda A + (1-\lambda) B$

<u>Beh. 4</u> (Allgemeine L^2-Funktionen) $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle \quad \forall v \in L^2((0,1))$

<u>Bew:</u> Aus Maßtheorie ist bekannt, daß Treppenfkt'en dicht in $L^2((0,1))$ liegen, d.h. $\forall v \in L^2, \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, v_\varepsilon$, — " —, mit $\|v - v_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$

$$\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle = \underbrace{\langle u_n - u, v_\varepsilon\rangle}_{\xrightarrow{\text{Beh. 3}} 0} + \underbrace{\langle u_n - u, v - v_\varepsilon\rangle}$$

$$|\ldots| \underset{\text{CSU}}{\leq} \|u_n - u\|_2 \, \|v - v_\varepsilon\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |u_n - u|^2} \cdot \|v - v_\varepsilon\|_2 \leq \max\{|A|, |B|\} \, \varepsilon$$

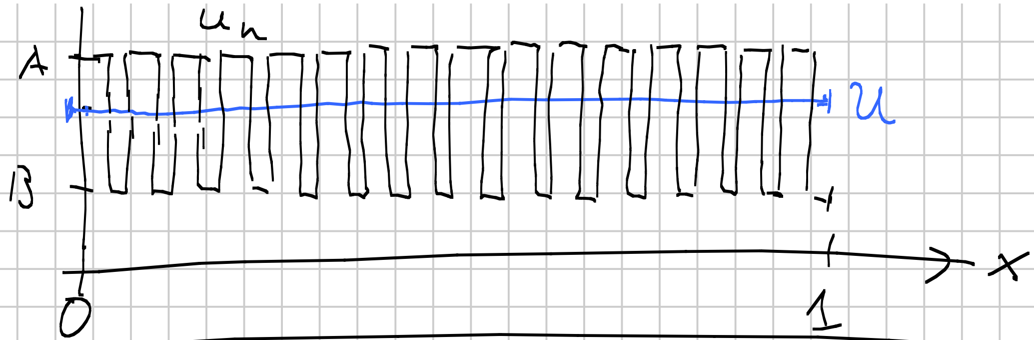
$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} |\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| \leq \quad \text{— " —}$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle \to 0$.

<u>Beh 5:</u> $u_n \rightharpoonup u = \lambda A + (1-\lambda) B$ (schwache Konvergenz in $L^2((0,1))$)

<u>Bew:</u> Riesz'scher Darstellungssatz: $L \in L^2((0,1))^*$
$\Rightarrow \exists v \in L^2 : L = \langle \cdot, v\rangle$. Also $L(u_n) \to L(u) \quad \forall L \in (L^2)^*$.

Interpretation:



$\boxed{\text{Der schwache Limes in } L^2(0,1) \text{ ist der lokale räumliche Mittelwert der Funktionswerte der Folge.}}$

__Beh. 6:__ u_n nicht konvergent gegen u.

__Bew:__ $\|u_n - u\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |u_n - u|^2 \, dx} \geq \min\{|A - (\lambda A + (1-\lambda)B)|, |B - (\lambda A + (1-\lambda)B)|\}$

__Proposition 9.1__ (Eigenschaften der schwachen Konvergenz)

Sei $\bar{X}$ Banachraum, $x_j \in \bar{X}$ $(j \in \mathbb{N})$, $x, x' \in \bar{X}$.

a) Falls $x_j \rightharpoonup x$ & $x_j \rightharpoonup x'$, gilt $x = x'$. (Eindeutigkeit)

b) —— " ——, ist $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

c) —— " ——, ist $\|x\| \leq \liminf_{j \to \infty} \|x_j\|$

d) — " ——— und $x_j \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{X}$ abgeschl. UR von $\mathfrak{X}$ $\Rightarrow x \in \mathcal{U}$.

e) — " ——— und $x_j \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{X}$ abgeschl. $\underset{\text{i.a.}}{\not\Rightarrow}$ $x \in \mathcal{U}$.

<u>Bew</u>: a) $\left.\begin{matrix} x_j \rightharpoonup x \\ x_j \rightharpoonup x' \end{matrix}\right\} \Rightarrow L(x - x') = \lim\limits_{j\to\infty} L(x_j - x_j) = 0 \ \forall L \in \mathfrak{X}^*$

$\mathfrak{X}$ Hilbertraum: Wähle $L = \langle \cdot , x - x' \rangle \Rightarrow L(x-x') = \|x-x'\|^2 = 0$

$\mathfrak{X}$ Banachraum: Wg. Hahn-Banach $\exists L \in \mathfrak{X}^*$ mit $L(x-x') = \|x-x'\|$.

b) Betrachte die Abbildungen $\mathfrak{X}_n : \mathfrak{X}^* \to \mathbb{K}$

$\mathfrak{X}_n(L) := L(x_n)$ Auswertung auf x_n.

Die $\mathfrak{X}_n(L)$ sind konvergent, also beschränkt

Also $\{\mathfrak{X}_n\}$ punktweise beschränkte Folge linearer Funktionale

Satz v. Banach-Steinhaus (Satz 4.3) $\Rightarrow \|\mathfrak{X}_n\| = \sup\limits_{L\in\mathfrak{X}^*} \dfrac{|\mathfrak{X}_n(L)|}{\|L\|}$ beschränkt

Satz von Hahn-Banach $\Rightarrow$ rechte Seite $\underset{\text{Def. der } \mathfrak{X}_n}{=} \sup\limits_{L\in\mathfrak{X}^*} \dfrac{|L(x_n)|}{\|L\|} = \|x_n\|$.

c) $|L(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |L(x_n)| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|L\| \, \|x_n\| \quad \forall L \in \mathfrak{X}^*$

$\mathbb{X}$ Hilbertraum: $L(x) := \langle \cdot, \frac{x}{\|x\|} \rangle \Rightarrow L(x) = \|x\|$, $\|L\| = 1$

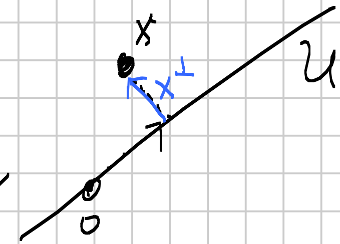
$\overset{\Rightarrow}{\text{Einsetzen}}$ $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$

$\mathbb{X}$ Banachraum: Satz v. Hahn Banach $\Rightarrow \exists L \in \mathbb{X}^*: L(x) = \|x\|$, $\|L\| = 1$.

d) $x_j \in U$, $x_j \rightharpoonup x$. Angenommen $x \notin U$.

$\mathbb{X}$ Hilbertraum: $L = \langle \cdot, x^\perp \rangle$, $\|x^\perp\| = \text{dist}(x, U) > 0$,

$\langle x^\perp, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$



$$0 = L(x_j) \longrightarrow L(x) = \|x^\perp\|^2 > 0 \quad ⚡$$

$\mathbb{X}$ Banachraum: Hahn-Banach $\Rightarrow \exists L \in \mathbb{X}^*: L|_U = 0$, $L(x) \neq 0$

$$0 = L(x_j) \longrightarrow L(x) \neq 0 \quad ⚡$$

e) $\mathbb{X} = \ell^2$, $e_j = (0, \ldots, 0, \underset{j\text{te Stelle}}{1}, 0, \ldots)$, $e_j \rightharpoonup 0$

$e_j \in \{x \in \ell^2 \mid \|x\| = 1\} =: U$ abg., $0 \notin U$.

<u>Bemerkung</u> (ohne Beweis) zu c), d), e):

$\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{X}$ abgeschlossen und konvex,

d.h. $\forall\, x, y \in \mathcal{U}$ ist $\lambda x + (1-\lambda) y \in \mathcal{U}$ $\forall \lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow$ falls $x_n \in \mathcal{U}$, $x_n \to x$, folgt $x \in \mathcal{U}$.

$\{\lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in [0,1]\}$

[Referenz: Werner, Satz III.3.8.]

- Dies erklärt c) & d), denn abg. UR^e sind abg. & konvex, bzw. die Kugeln $\{ y \in \bar{\mathfrak{X}} \mid \|y\| \leq \liminf_{j\to\infty} \|x_j\| + \varepsilon \}$ sind abg. & konvex $\forall \varepsilon > 0$.
- Dies ist konsistent mit e), denn die kleinste konvexe Menge, die die Sphäre $\{ x \in \ell^2 \mid \|x\| = 1 \}$ enthält, ist die Kugel $\{ x \in \ell^2 \mid \|x\| \leq 1 \}$, welche 0 enthält.