Beweis von Satz 8.3 (Hahn-Banach), nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

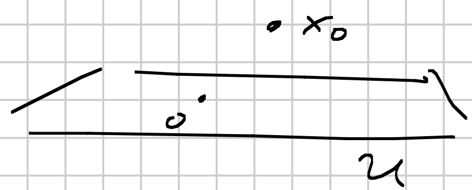
Idee

- $\operatorname{codim} \mathcal{U} = 1$, d.h. "dim $\rightsquigarrow$ dim + 1"
- "Induktionsprinzip" (aber Vorsicht: i.a. hat $\bar{X}$ überabzählbar viele Dimensionen mehr als $\mathcal{U}$)

Schritt 1 Sei $\operatorname{codim} \mathcal{U} = \dim \bar{X}/\mathcal{U} = 1$.

Wähle $x_0 \in \bar{X} \setminus \mathcal{U}$

$\Rightarrow \forall x \in \bar{X}: \quad x = \underbrace{u}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}} x_0$



Ansatz: $L(x) = \ell(u) + r\lambda$, $\quad r > 0$ frei zu wählen

offensichtlich linear, $L = \ell$ auf $\mathcal{U}$.

z.z. $L \le p$ auf $\bar{X}$.

$\iff \ell(u) + r\lambda \le p(u + \lambda x_0) \qquad \forall u \in \mathcal{U}, \lambda \in \mathbb{R}$

$\iff \lambda r \le p(u + \lambda x_0) - \ell(u) \qquad$ —"—

$\lambda > 0$: $\iff r \le p\left(\frac{u}{\lambda} + x_0\right) - \ell\left(\frac{u}{\lambda}\right) \qquad \forall u \in \mathcal{U}, \lambda > 0$

$\iff r \le \inf_{v \in \mathcal{U}} \left(p(v + x_0) - \ell(v) \right) \qquad (1)$

$\lambda<0$: $\Leftrightarrow$ $\quad -r \leq p\left(\frac{u}{-\lambda}-x_0\right) - \ell\left(\frac{u}{-\lambda}\right) \quad$ — " —, $\lambda<0$

$\cdot\frac{1}{(-\lambda)}$

$\Leftrightarrow$ $\quad r \geq \ell\left(\frac{u}{-\lambda}\right) - p\left(\frac{u}{-\lambda}-x_0\right)$

$\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow$ $\quad r \geq \sup\limits_{w\in U}\left(\ell(w) - p(w-x_0)\right) \qquad (2)$

$\exists r$, welches (1) & (2) erfüllt, g.d.w.

$$\ell(w) - p(w-x_0) \leq p(v+x_0) - \ell(v) \quad \forall v,w\in U$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell(v)+\ell(w) \leq p(v+x_0) + p(w-x_0) \quad \text{— " —}$$

Aber: $\quad \ell(v)+\ell(w) = \ell(\underbrace{v+w}_{\in U}) \underset{\ell\leq p \text{ auf } U}{\leq} p(v+w) = p(v+x_0+w-x_0) \underset{p \text{ subl.}}{\leq} p(v+x_0)+p(w-x_0)$. ✓

Schritt 2. Mithilfe eines Resultates aus der Mengenlehre

Zorn'sches Lemma: Sei $(A,\leq)$ eine partiell geordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt A ein maximales Element, d.h. $\exists m\in A: \nexists m' > m$.

Anwenden auf:

$$A := \left\{ (V, L_V) \;\middle|\; \begin{array}{l} V \text{ UR von } \underline{X} \text{ mit } V \supseteq U \\ L_V : V \to \mathbb{R} \text{ linear mit } L_V \leq p|_V,\ L_V|_U = \ell \end{array} \right\}$$

(Lösungen des Fortsetzungsproblems auf Unterräumen V mit $U \subseteq V \subseteq \underline{X}$)

Ordnung auf A: $(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2}) \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2,\ L_{V_2}|_{V_1} = L_{V_1}$

A nichtleer, da $(U, \ell) \in A$ ✓

Sei $(V_i, L_{V_i})_{i \in I}$ total geordnet

$V := \bigcup_{i \in I} V_i, \quad L_V := L_{V_i} \quad \forall x \in V_i$

Dann (V, L_V) obere Schranke

Zorn'sches Lemma $\Rightarrow \exists\, (\underline{X}_0, L_{\underline{X}_0})$ maximales Element

Beh.: $\underline{X}_0 = \underline{X}$. Bew. (indirekt) $\underline{X}_0 \neq \underline{X} \underset{\text{Schritt 1}}{\Rightarrow} \exists\, (\tilde{\underline{X}}_0, L_{\tilde{\underline{X}}_0}) > (\underline{X}_0, L_{\underline{X}_0})$

(mit $\dim \tilde{\underline{X}}_0 / \underline{X}_0 = 1$). ↯ zu $(\underline{X}_0, L_{\underline{X}_0})$ maximal.

Korollar 8.3 X normierter VR. $\forall x \in X \setminus \{0\} \; \exists L \in X^*$:

$$\|L\| = 1, \quad L(x) = \|x\|.$$

Insbesondere: $\forall x_1 \neq x_2 \; \exists L \in X^*: \quad L(x_1) \neq L(x_2)$.

x_1 x_2 d.h. X^* "trennt Punkte" bzw. $\exists$ "Koordinate", in der sich x_1 & x_2 unterscheiden

[Im Hilbertraum trivial: setze $L(x) = \langle \cdot , \frac{x}{\|x\|} \rangle$]

Bew: $\ell : \operatorname{Span}\{x\} \to \mathbb{K}$

$\ell(\lambda x) := \lambda \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \|\ell\| = 1, \; \ell(x) = \|x\|$

L normgleiche Fortsetzg. auf X.

"Insbesondere": Wähle L mit $\underbrace{L(x_1 - x_2)}_{= L(x_1) - L(x_2)} = \|x_1 - x_2\|$.

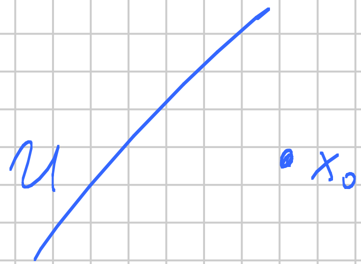
Kor. 8.4 (Charakterisierung der Norm) Sei X normierter VR. Dann:

$$\|x\| = \sup_{L \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|L(x)|}{\|L\|}.$$

[vgl: $\|L\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|L(x)|}{\|x\|}$, $\forall L \in X^*$.]

<u>Bew:</u> "$\geq$" trivial, da $|L(x)| \leq \|L\| \cdot \|x\|$.
"$\leq$" nach Kor. 8.3, da für obiges L: $\frac{|L(x)|}{\|L\|} = \frac{\|x\|}{1}$.

<u>Kor. 8.5</u> Sei X Banachraum, U abg. UR, $x_0 \in X \setminus U$.
Dann $\exists\, L \in X^*$ mit $L|_U = 0$, $L(x_0) \neq 0$.



d.h. X^* "trennt Punkte von abg. UR^{en}"

[Im Hilbertraum trivial, setze $L = \langle \cdot , x_0^\perp \rangle$]

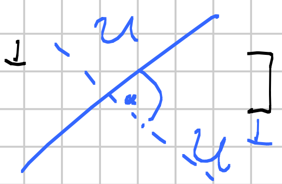
<u>Bew:</u> $\omega : X \to X/U$ Quotientenabb.
$x \mapsto \{x + u \mid u \in U\}$

$$\omega(u) = 0_{X/U} \qquad \forall u \in U$$
$$\omega(x_0) \neq 0_{X/U}$$

Wähle $\ell : \operatorname{Span}\{\omega(x_0)\} \to \mathbb{K}$, $\ell(\omega(x_0)) \neq 0$.
Wähle $\tilde{L}$ stetige lin. Fortsetzung von ℓ auf X/U.
($\exists$ nach Hahn-Banach).

$$L(x) := \tilde{L}(\omega(x)) \quad \Rightarrow \quad L(x_0) = \tilde{L}(\omega(x_0)) \neq 0,$$
$$L(u) = \tilde{L}(0) \underset{\tilde{L} \text{ linear}}{=} 0 \quad \forall u \in U.$$

Kor. 8.6 [Lemma 5.4 in §5] (Existenz abgeschlossener Komplemente) Sei X B.-Raum, U endlichdim. UR
$\Rightarrow$ $\exists$ abgeschlossenes Komplement von U.

[Im Hilbertraum trivial, sogar für U abg.: $X = U \oplus U^\perp$ ]

Bew: Siehe Übungen.

§9 Schwache Konvergenz

Eine wichtige Aussage im $\mathbb{R}^n$, die sich auf keinen (∞-dim.) B-Raum überträgt, ist der Satz von Bolzano-Weierstrass (beschränkte Folgen besitzen konv. TF^{en}). Siehe Satz 1.5.

Elementares Bsp in ℓ^2: $e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$ $\quad \|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad i \neq j$

$e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$

$e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots)$

Aber oft nützlich, konv. TF^{en} zu extrahieren.

Ausweg: Schwächerer Konvergenzbegriff als $\|f_j - f\| \to 0$.

Def. 9.1 Sei X Banachraum, X^* der Dualraum von X.

1) Eine Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert schwach gegen $x \in X$, Schreibweise: $x_j \rightharpoonup x$, wenn

$$L(x_j) \to L(x) \qquad \forall L \in X^*$$

2) Eine Folge $(L_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\underline{X}^*$ <u>konvergiert schwach*</u> gegen $L \in \underline{X}^*$, Schreibweise: $L_j \overset{*}{\rightharpoonup} L$, wenn

$$L_j(x) \longrightarrow L(x) \quad \forall x \in \underline{X}.$$

<u>Bem:</u> Schwach* Konvergenz = punktweise Konv.

Der Name schwache Konv. ist gerechtfertigt, da

$$x_j \to x \implies x_j \rightharpoonup x \quad \Big[\text{Bew: } x_j \to x \underset{L \in \underline{X}^* \text{ stetig}}{\implies} L(x_j) \to L(x)\Big]$$

$$L_j \to L \implies L_j \overset{*}{\rightharpoonup} L \quad \Big[\text{Bew: } L_j \to L \iff \sup_{x \neq 0} \frac{|L_j x - Lx|}{\|x\|} \to 0$$

Die Umk. gilt nicht:

$$\implies |L_j x - Lx| \to 0 \ \forall x\Big]$$

<u>Bsp 1)</u> $\underline{X} = \ell^2$, $e_j = (0, \dots, 0, \underset{\underset{j}{\uparrow}}{1}, 0, \dots)$

$(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ nicht konv., da $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2} \quad \forall i \neq j$

$L(e_j) \underset{\underset{\text{Riesz}}{\uparrow}}{=} \langle e_j, a \rangle$ für ein $a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \ell^2$

$ = a_j \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty)$, da $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 = \|a\|^2 < \infty$

Also $e_j \longrightarrow 0$, d.h. e_j konvergiert schwach gegen 0.