**Wdh:** $1 \le p \boxed{<} \infty$ $\begin{cases} (\ell^p)^* \cong \ell^q \\ L^p(\Omega)^* \cong L^q(\Omega) \end{cases}$ d.h. $L \in \begin{cases} \ell^{p*} \\ L^{p*} \end{cases} \Rightarrow L = \begin{cases} \sum_j (\cdot)_j g_j, & g \in \ell^q \\ \int_\Omega \cdot(x)\, g(x)\, dx, & g \in L^q \end{cases}$

$p=2$: Folgt aus Riesz (Satz 7.1).

Der Bew. von (a) zeigt $\forall 1 \le p \boxed{\le} \infty$: $\left(\overline{d}^{\|\cdot\|_p}\right)^* \cong \ell^q$

Für $p = \infty$ liegt $d$ nicht dicht in $\ell^p$

Es gilt $\overline{d}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0 \subsetneq \ell^\infty$

Nullfolgen

<u>Korollar 8.1</u> $(c_0)^* \cong \ell^1$.

<u>Bew. von Satz 8.2 b)</u> $\left((L^p)^* \cong L^q\right)$

„$\supseteq$" folgt ($\forall 1 \le p \le \infty$) direkt aus Hölder. z.z.: „$\subseteq$", d.h. jedes $L \in (L^p)^*$ ist als $\int_\Omega \cdot\, g$, $g \in L^q$, darstellb.

Maßtheor. Bew. (via Satz v. Radon-Nikodym): siehe Werner, § II.2

Hier: Funktionalanalyt. Beweis à la Bew. des Riesz'schen Darstellungssatzes (Satz 7.1)

[ Riesz: Gegeben $L \in X^*$.

Minimiere $\quad I(f) := \underbrace{\frac{1}{2}\|f\|^2}_{\frac{1}{2}\int_\Omega |f(x)|^2\,dx \text{ in } L^2} - L(f) \quad$ (z.z.: $\exists$)

$f$ Minimierer $\Rightarrow \langle f, \varphi\rangle - L(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in X$. ]

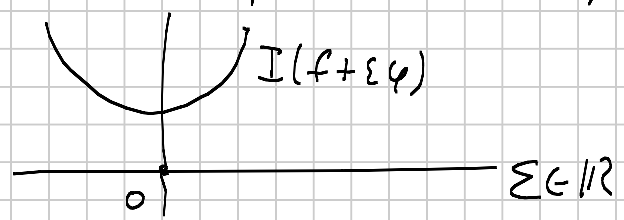
Gegeben $L \in L^p(\Omega)^*$

Minimiere $\quad I(f) := \frac{1}{p}\int_\Omega |f(x)|^p\,dx - L(f)$

Beh.: $\exists$ Minimierer. (Beweis: später.)

Sei $f$ Minimierer $\Rightarrow$

$$I(f) \le I(f+\varepsilon\varphi) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \forall \varphi \in L^p(\Omega)$$




$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} I(f+\varepsilon\varphi)$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\left(\int_\Omega \frac{1}{p}|f+\varepsilon\varphi|^p - \underbrace{L(f+\varepsilon\varphi)}_{L(f)+\varepsilon L(\varphi),\ \text{da } L \text{ lin.}}\right)$$

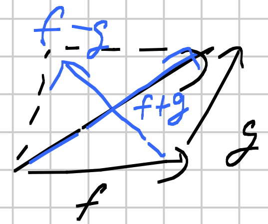
$$= \int_\Omega |f+\varepsilon\varphi|^{p-1} \operatorname{sgn}(f+\varepsilon\varphi)\cdot\varphi - L(\varphi) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_\Omega \underbrace{|f|^{p-1}\operatorname{sgn} f}_{\in L^q,\ \text{da } \int_\Omega \left||f|^{p-1}\operatorname{sgn} f\right|^q = \int_\Omega |f|^{\overbrace{(p-1)\cdot q}^{=p}} = \int_\Omega |f|^p < \infty} \cdot\varphi - L(\varphi) \qquad \forall\varphi\in L^p(\Omega)$$

da $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \iff q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{p-1}{p}} = \frac{p}{p-1}$

Nach 7.7: $\exists$ Minimierer.

Brauchen Verallg. der Parallelogrammgl. im Hilbertraum




$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2 = \cancel{2}\,\frac{1}{2}\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)$$

**Lemma 8.1** (Clarkson'sche Ungleichungen) $\forall f,g\in L^p(\Omega)$

(a) $2\le p<\infty \Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \le \frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$

(b) $1<p<2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \le \left(\frac{1}{2}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)\right)^{q-1}$

Bew. der Existenz eines Minimierers von $I(f)$ für $2 \le p < \infty$:

Wähle Minimalfolge $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $f_j \in L^p(\Omega)$, d.h.

$$I(f_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} \inf_{f \in L^p(\Omega)} I(f) =: d.$$

Betrachte $f := f_j$, $f' := f_k$

$$\begin{aligned}
d \xleftarrow[\min\{j,k\} \to \infty]{} \; & \frac{1}{2}\left( I(f_j) + I(f_k) \right) \\
= \; & \frac{1}{2}\left( \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{p}\|f'\|_p^p \right) - L\left(\frac{f+f'}{2}\right) \\
\underset{\text{Clarkson}}{\geq} \; & \underbrace{\frac{1}{p}\left\|\frac{f+f'}{2}\right\|_p^p - L\left(\frac{f+f'}{2}\right)}_{I\left(\frac{f+f'}{2}\right)} + \frac{1}{p}\left\|\frac{f-f'}{2}\right\|_p^p \\
\geq \; & d + \frac{1}{p}\left\|\frac{f_j - f_k}{2}\right\|_p^p
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \left\|\frac{f_j - f_k}{2}\right\|_p^p \to 0$ $(\min\{j,k\} \to \infty)$ d.h. $\{f_j\}$ Cauchy.

$L^p$ vollst. $\Rightarrow \exists f = \lim_{j \to \infty} f_j$.

$I$ stetig (da $\|\cdot\|$ stetig u. $L$ stetig) $\Rightarrow I(f) = \lim_{j \to \infty} I(f_j) = d$

d.h. $f$ Minimierer.

**Bew. Lemma 8.1 a)** (Nicht trivial selbst für $a, b \in \mathbb{R}$)

**Beh. 1** $0 < r \leq p \Rightarrow \|x\|_p \leq \|x\|_r \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(wobei $\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$)

(Insbes. $\ell^p \supseteq \ell^r$)

**Bew:** OBdA $\|x\|_r = 1$, z.z.: $\|x\|_p \leq 1$

$$\|x\|_r = 1 \iff \left( \sum_j |x_j|^r \right)^{1/r} = 1$$

$$\iff \sum_j |x_j|^r = 1$$

$$\Rightarrow |x_j| \leq 1 \quad \forall j$$

$$\Rightarrow |x_j|^p \leq |x_j|^r \quad \forall j \quad (\text{da } p \geq r)$$

$$\overset{\sum_j}{\Rightarrow} \sum_j |x_j|^p \leq \sum_j |x_j|^r = 1$$

$$\overset{(\ )^{1/p}}{\Rightarrow} \|x\|_p \leq 1$$

**Beh. 2** $p \geq 2,\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(|a+b|^p + |a-b|^p\right)^{1/p} \leq \sqrt{2}\,\left(a^2+b^2\right)^{1/2}$

**Bew:** $\text{linke Seite} = \Big\| \underbrace{\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2} \Big\|_p \underset{\text{Beh. 1}}{\leq} \Big\| \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} \Big\|_2$

$= \left((a+b)^2 + (a-b)^2\right)^{1/2} = \left(2a^2+2b^2\right)^{1/2} = \text{rechte Seite}$

**Beh. 3** $p \geq 2,\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2+b^2 \leq 2^{\frac{p-2}{p}} \cdot \left(|a|^p + |b|^p\right)^{2/p}$

**Bew** $a^2+b^2 = \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{r}+\frac{1}{p/2}=1 \\ \text{Hölder}}}{\leq} \Big\| \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \end{pmatrix} \Big\|_{p/2} \Big\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\|_r$

$= \Big( \underbrace{(a^2)^{\frac{p}{2}}}_{=|a|^p} + \underbrace{(b^2)^{p/2}}_{=|b|^p} \Big)^{2/p} \cdot \underbrace{\left(1^r + 1^r\right)^{\frac{1}{r}}}_{= 2^{\frac{1}{r}} = 2^{1-\frac{2}{p}} = 2^{\frac{p-2}{p}}}$

$=$

Also $\left(|a+b|^p + |a-b|^p\right)^{1/p} \underset{\text{Beh. 2}}{\leq} \sqrt{2}\,\left(a^2+b^2\right)^{1/2} \underset{\text{Beh. 3}}{\leq} 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(|a|^p + |b|^p\right)^{1/p} \cdot 2^{\frac{p-2}{2p}}$

$$= 2^{1-\frac{1}{p}} \cdot ( \text{—''—} )$$

$$= 2^{\frac{p-1}{p}} \cdot ( \text{—''—} ).$$

$\overset{(\;)^p}{\Longrightarrow}$ $|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2^{p-1} \left( |a|^p + |b|^p \right) \quad \forall a,b \in \mathbb{R},\ p \geq 2.$

$\Longrightarrow$ Beh.

$a = f(x),\ b = g(x),\ \int_\Omega$

(Bew. von Lemma 8.1 b): z.B. Hirzebruch/Scharlau, Funktionalanalysis)

Nächstes Ziel: Allg. Aussagen über Dualräume.
z.B. Bisher nicht klar, ob der Dualraum eines allg. B-Raumes überhaupt Elemente $\neq 0$ enthält!

<u>Satz 8.3</u> (Satz von Hahn-Banach)

Sei $X$ reeller (oder komplexer) VR, $U$ Unterraum von $X$, $p: X \to \mathbb{R}$ sublinear (d.h. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $(\lambda \geq 0)$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$).

$\ell : U \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) linear, und es gelte

$$\ell \leq p \text{ auf } U \qquad (\text{oder } \operatorname{Re} \ell \leq p \text{ auf } U).$$

Dann existiert $L : X \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), linear, mit

$$L \leq p \text{ auf } X \qquad (\text{oder } \operatorname{Re} L \leq p \text{ auf } X).$$

<u>Korollar 8.1</u> (Satz von Hahn-Banach für Normen)

$X$ normierter $\mathbb{K}$-VR, $U$ UR, $\ell : U \to \mathbb{K}$ stetiges lineares Funktional

$\Rightarrow$ $\exists$ stetiges lin. Funktional $L : X \to \mathbb{K}$ mit

$$\|L\| = \|\ell\|, \quad L|_U = \ell.$$

(Jedes stetige lineare Fkt. auf einem UR kann normgleich auf den ganzen Raum fortgesetzt werden.)

<u>Bew. von Kor. 8.1 via Satz 8.3, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.</u>

$$\left.\begin{aligned} p(x) &:= \|\ell\| \, \|x\| \\ p(\lambda x) &= \|\ell\| \, \|\lambda x\| = \lambda \|\ell\| \|x\| = \lambda p(x) \quad \forall \lambda \geq 0 \\ p(x+y) &= \|\ell\| \, \|x+y\| \underset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} p(x) + p(y) \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ $p$ sublinear.

Auf $\mathcal{U}$ gilt, da $\|\ell\| = \sup\limits_{x \in \mathcal{U}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|}$ :

$$|\ell(x)| \leq \|\ell\| \, \|x\| = p(x).$$

Satz 8.3 $\Rightarrow$ $\exists \, L : \bar{X} \to \mathbb{R}$, linear, $\ell = L$ auf $\mathcal{U}$, mit

$$L(x) \leq p(x) = \|\ell\| \|x\| \text{ auf } \bar{X}.$$

$$\Rightarrow \quad -L(x) = L(-x) \leq p(-x) = \|\ell\| \underbrace{\|-x\|}_{= \|x\|} = p(x)$$

$$\Rightarrow \quad |L(x)| \leq \|\ell\| \, \|x\| \quad \forall x \in \bar{X}$$

$$\Rightarrow \quad \|L\| \leq \|\ell\|.$$

„$\geq$" trivial, da $L = \ell$ auf $\mathcal{U}$.