§8 Dualräume

Der Dualraum ist in vielen Problemstellungen der F.A. nützlich, z.B. zur Def. der sogenannten "schwachen Konvergenz" ($\to$ §9).

<u>Wdh.</u> ($\to$ §3) Der Dualraum X^* eines Banachraumes X über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ od. $\mathbb{C}$ ist der Raum $L(X, \mathbb{K})$, versehen mit der Operatornorm

$$\|L\|_{X^*} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|Lx|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_X}.$$

Gemäß Satz 3.1 ist $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ ebenfalls Banachraum. Die Elemente von X^* heißen <u>stetige lineare Funktionale</u> (statt stetige lineare Operatoren).

<u>Typisches Bsp:</u> $X = C([a,b])$, $Lf = \int_a^b f$,

stetig da $|Lf| = |\int_a^b f| \leq (b-a)\|f\|_\infty = (b-a)\|f\|_{\underline{X}}$.

Erstes Ziel: Bestimmen* der Dualräume wichtiger B-Räume.

* "bis auf Isomorphie" bzw. "bis auf Isometrie"

<u>Def.</u> (Isomorphie; Isometrie) Zwei B-Räume $(\underline{X}, \|\cdot\|_{\underline{X}})$ und $(\underline{Y}, \|\cdot\|_{\underline{Y}})$ heißen

(a) <u>isomorph</u>, Schreibweise: $\underline{X} \cong \underline{Y}$, wenn ein stetiger Isomorphismus $T: \underline{X} \to \underline{Y}$ existiert, d.h. eine stetige lineare bijektive Abb.. (In diesem Fall ist, wg. Satz 4.1, T^{-1} ebenfalls stetig.)

(b) <u>isometrisch</u>, wenn zusätzlich $\|Tx\|_{\underline{Y}} = \|x\|_{\underline{X}}$ $\forall x \in \underline{X}$.

<u>Satz 8.1</u> (Dualraum eines Hilbertraumes) Falls $\underline{X}$ Hilbertr., gilt

$$\underline{X}^* \cong \underline{X},$$

und die Abbildung

$$T : \underline{X} \longrightarrow \underline{X}^*$$
$$y \longmapsto \langle \cdot , y \rangle$$

ist isometrischer Isomorphismus.

<u>Bew.</u> injektiv: $\langle \cdot, y \rangle = 0 \in \underline{X}^*$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in \underline{X}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle y, y \rangle}_{= \|y\|^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \in \underline{X}.$$

surjektiv: Riesz'scher Darstellungssatz (Satz 7.1)

isometrisch (insbes. stetig):

$$\|T(y)\|_{\underline{X}^*} = \|\langle \cdot, y \rangle\|_{\underline{X}^*} = \sup_{x \in \underline{X} \setminus \{0\}} \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|_{\underline{X}}}$$

$$= \sup_{x \in \underline{X} \setminus \{0\}} \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, y \right\rangle \right|$$

$$\underset{\substack{\text{Gleichheit in CSU} \\ (\text{z.B. } \mathbb{K} = \mathbb{R})}}{=} \left| \left\langle \pm \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle \right| = \frac{\|y\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|y\|}}$$

Insbesondere: $(\ell^2)^* \cong \ell^2$

$$L^2(\Omega)^* \cong L^2(\Omega), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ meßbar}$$

[D.h. die einzigen stetigen linearen Abb'en $L : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ sind von der Form

$$f \longmapsto \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$$

für ein $g \in L^2(\Omega)$.]

Diese beiden Aussagen besitzen eine interessante Verallg. auf ℓ^p bzw. $L^p(\Omega)$.

<u>Satz 8.2</u> Sei $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) $$(\ell^p)^* \cong \ell^q,$$

und die Abbildung

$$T : \ell^q \to (\ell^p)^*$$

$$y \longmapsto T(y) = \sum_{j=1}^{\infty} (\cdot)_j \, y_j$$

$$\left[\text{d.h. } T(y)\,x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot y_j \quad \forall x \in \ell^p \right]$$

ist isometrischer Isomorphismus.

b) Für beliebige meßbare $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$(L^p(\Omega))^* \cong L^q(\Omega)$$

und die Abbildung

$$T : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$$
$$g \mapsto T(g) = \int_\Omega \cdot(x)\, g(x)\, dx$$

$$\left[\text{d.h. } T(g) f = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx \right]$$

ist isometrischer Isomorphismus.

<u>Beweis von a)</u> z.z. 1) $T(y) = \sum_j (\cdot)_j y_j \in (\ell^p)^*$ wenn $y \in \ell^q$

2) T injektiv

3) surjektiv

4) Isometrie

1): Sei $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^q$

$$|T(y)\,x| = \Big|\sum_j x_j y_j\Big| \underset{\substack{\text{Hölder}\\ (\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)}}{\leq} \|x\|_p \, \|y\|_q$$

$$\Rightarrow T(y) \in (\ell^p)^* \quad \Big(\text{d.h. } \|T(y)\|_{(\ell^p)^*} = \sup_{x\in\ell^p\setminus\{0\}} \frac{|T(y)\,x|}{\|x\|_p} < \infty\Big),$$

$$\boxed{\|T(y)\|_{(\ell^p)^*}} = \sup_{x\in\ell^p\setminus\{0\}} \frac{|T(y)\,x|}{\|x\|_p} \boxed{\leq \|y\|_q} \qquad (*)$$

2): Sei $T(y) = 0$. z.z.: $y = 0$.

$$T(y) = 0 \iff T(y)\,x = 0 \quad \forall\, x \in \ell^p$$

$$\Rightarrow T(y)\,e_n = 0 \quad \forall n, \quad e_n = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ n\text{-te Stelle}}}{1},0,\dots)$$

$$T(y)\,e_n \overset{\text{Def. von } T}{=} \sum_j (e_n)_j\, y_j = \sum_j \delta_{nj}\, y_j = y_n$$

$$\Rightarrow y = 0.$$

3) Sei $L \in (\ell^p)^*$. z.z.: $\exists y \in \ell^q$ sodass $L = \sum_j (\cdot)_j y_j$

Idee: Falls $L = \sum_j (\cdot)_j y_j$, muss insbesondere gelten:

$$L(e_n) \overset{!}{=} \sum_j \underbrace{(e_n)_j \cdot y_j}_{= y_n}$$

Definiere also $y_n := L(e_n)$.

<u>Beh.</u>: $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$, $Lx = T(y)x \quad \forall x \in \ell^p$,

$$\|y\|_q \leq \|L\|_{(\ell^p)^*}.$$

Sei $\tilde{y}_n := \begin{cases} |y_n|^{q-1} \operatorname{sgn}(y_n) & y_n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(1) $$\sum_{n=1}^N |\tilde{y}_n|^p = \sum_{n=1}^N |y_n|^{p(q-1)} \underset{p(q-1)=q}{=} \sum_{n=1}^N |y_n|^q$$

(2) $$-\|- = \boxed{\sum_{n=1}^N |y_n|^q} = \sum_{n=1}^N y_n \tilde{y}_n = \sum_{n=1}^N \tilde{y}_n L(e_n)$$

$$\underset{L \text{ linear}}{=} L\left(\sum_{n=1}^N \tilde{y}_n e_n\right) = L((\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N, 0, \ldots))$$

$$\leq \|L\|_{(\ell^p)^*} \, \|(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N, 0, \ldots)\|_p$$

$$= \text{—''—} \left(\sum_{j=1}^{N} |\tilde{y}_j|^p \right)^{1/p}$$

$$= \text{—''—} \left(\sum_{j=1}^{N} |y_j|^q \right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q \right)^{\underbrace{1 - \frac{1}{p}}_{= \frac{1}{q}}} \leq \|L\|_{(\ell^p)^*} \qquad \Big| \; N \to \infty$$

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow \quad y \in \ell^q, \quad \|y\|_q \leq \|L\|_{(\ell^p)^*} \qquad (**).$$

Nach Konstruktion der y_n gilt

$$L = T(y) \quad \left(= \sum_j (\cdot)_j \, y_j \right) \quad \text{auf } \{e_1, e_2, \ldots\}.$$

$$\underset{T \text{ linear}}{\Rightarrow} \quad L = T(y) \quad \text{auf Span}\{e_1, e_2, \ldots\} = d$$

$$\Rightarrow \quad L = T(y) \text{ auf } \overline{d}^{\|\cdot\|_p}$$

Folgenraum aus §1;
nur endl. viele von 0 versch. Kp'en

$T(y)$, ℓ stetig auf ℓ^p

Für $1 \le p < \infty$ (aber nicht $p = \infty$) gilt: d dicht in ℓ^p

$\Rightarrow \quad \ell = T(y)$ auf ℓ^p für diese p.

4) $\quad \| T(y) \|_{(\ell^p)^*} = \|y\|_q$ wg. $(*)$, $(**)$ und $T(y) = \ell$.

$=$

$=$